

Transformada de derivadas

Por

Miriam Rodríguez Olivarez

Un par de ejemplos hará que quede más claro

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0)$$

Vamos a resolver una ecuación diferencial con esta nueva información

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 13\text{sen}2t$$

$$y(0) = 6$$

Aplicamos Laplace a toda la ecuación

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 3\mathcal{L}\{y\} = 13\mathcal{L}\{13\text{sen}2t\}$$

Usando el primer punto, tenemos

$$sY(s) - y(0)$$

Para el segundo sumando:

$$3Y(s)$$

Para el lado derecho de la igualdad

$$13 \cdot \frac{2}{s^2 + 4}$$

Juntando todo y desarrollando el álgebra tenemos

$$sY(s) - y(0) + 3Y(s) = \frac{26}{s^2 + 4}$$

$$sY(s) + 3Y(s) = \frac{26}{s^2 + 4} + 6$$

$$Y(s)(s+3) = \frac{6s^2 + 50}{s^2 + 4}$$

$$Y(s) = \frac{6s^2 + 50}{(s^2 + 4)(s + 3)}$$

Para qué hemos llegado hasta aquí...

Resolver una ecuación diferencial (en variable t) de forma más fácil (en variable s), hacer toda el álgebra en términos de la transformación y por último, regresar con una transformada inversa a la variable inicial (t)

Resolvemos reescribiendo esa fracción como dos formas simples (usando fracciones parciales), es decir:

$$Y(s) = \frac{6s^2 + 50}{(s^2 + 4)(s + 3)}$$

$$= \frac{-2s + 6}{s^2 + 4} + \frac{8}{s + 3}$$

$$= -2 \frac{s}{s^2 + 4} - 6 \frac{1}{s^2 + 4} + \frac{8}{s + 3}$$

Resolver una ecuación en variable t

Resolver una ecuación en variable s

Aplicar Laplace inversa a Y(s) para encontrar la solución y(t)

Simplificar para encontrar la función Y(s)

Después, aplicamos Laplaciano inverso para regresar a la variable t

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4}\right\} + 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\} + 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 3}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + k^2}\right\} = \cos kt$$

k=2

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2 + k^2}\right\} = \text{sen} kt$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - a}\right\} = e^{at}$$

a=3

$$y(t) = -2 \cos 2t + 3 \text{sen} 2t + 8e^{3t}$$

Para más información

Pueden auxiliarse del canal Math Rocks, con una muy útil introducción en el video llamado TRANSFORMADA de LAPLACE, el FÉNIX de las ECUACIONES DIFERENCIALES curso COMPLETO cuyo enlace comparto en el siguiente código



Referencias para el ejercicio se encuentran en el libro: Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera- Zill, Cullen

