CAPÍTULO 14: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS ELEMENTALES

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 14: Identidades Trigonométricas Elementales

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

11 diapositivas

CAPÍTULO 14

TRIGONOMETRÍA

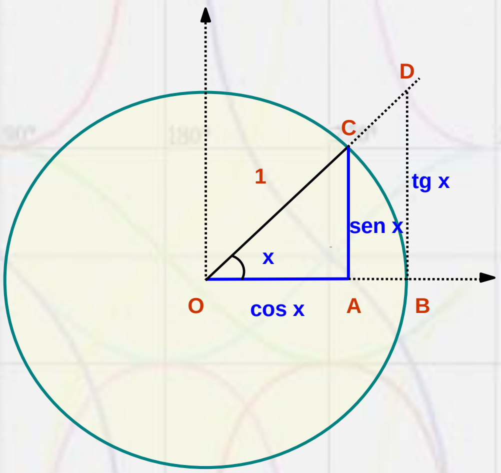
Identidades Trigonométricas Elementales

Identidades Trigonométricas Elementales

TEOREMA XIV-1 $sen^2 x + \cos^2 x = 1$

DEMOSTRACIÓN

Se aplica al triángulo formado por el seno, el coseno y el radio vector, tal como aparecen en el gráfico de la circunferencia trigonométrica, el teorema de Pitágoras



Identidades Trigonométricas Elementales

TEOREMA XIV-2

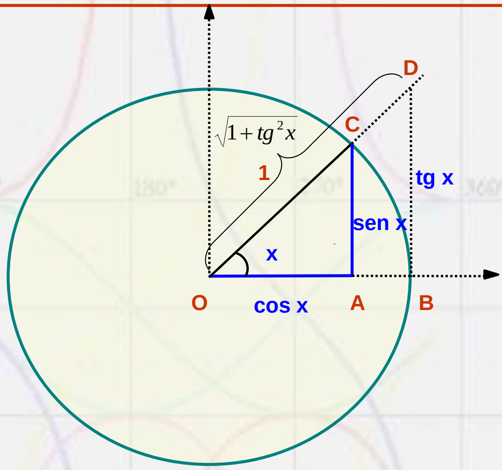
$$\operatorname{sen} x = \frac{\pm \operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \qquad \cos x = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$$

DEMOSTRACIÓN

Los Δ OAC y Δ ODB son semejantes.

$$\frac{|\operatorname{sen} x|}{1} = \frac{|\operatorname{tg} x|}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$$

$$\frac{|\cos x|}{1} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$$



Los signos + ó – dependen del cuadrante donde se halle x; pero deben ser los dos signos + ó los 2 -, pues $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$

Identidades Trigonométricas Elementales

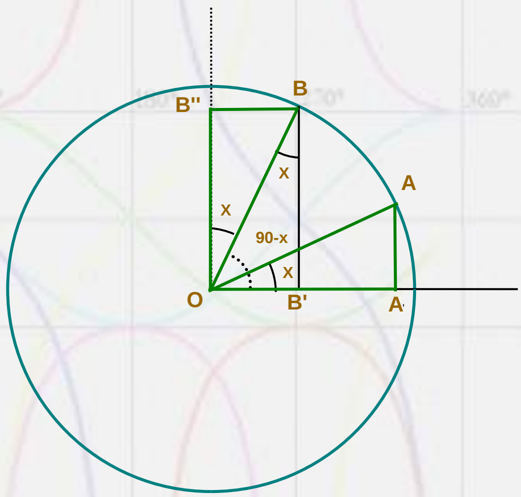
TEOREMA XIV-3

En dos ángulos complementarios, las líneas del uno son las colíneas del otro.

Esto quiere decir que el seno de uno es el coseno del otro; que la cosecante de uno es la secante del otro; etc.

Es decir:

$$\operatorname{sen}(90^o - x) = \cos x$$
$$\cos(90^o - x) = \operatorname{sen} x$$
$$\operatorname{tg}(90^o - x) = \cot x$$



Identidades Trigonométricas Elementales

DEMOSTRACIÓN

Supondremos un ángulo x positivo y menor de 90º

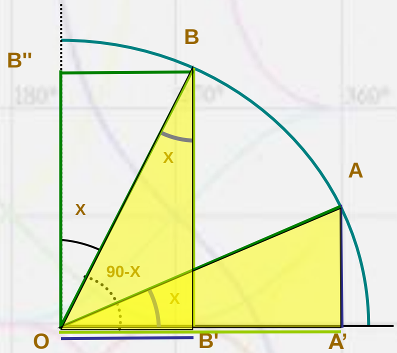
Los Δ AA'O y Δ OB'B son congruentes

AA' = OB' ; OA' = BB' ; o sea

$$\operatorname{sen} x = \cos(90^{o} - x)$$
$$\cos x = \operatorname{sen}(90^{o} - x)$$

Dividiéndolas:

$$\operatorname{tg} x = \cot(90^{o} - x)$$

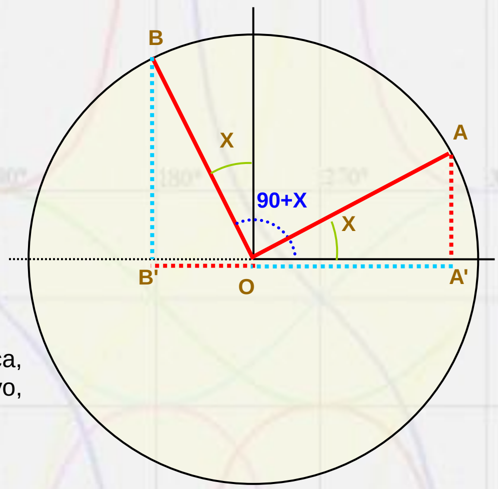


Puede demostrarse que el teorema es válido para cualquier x , ya sea menor o mayor que 90º, positivo o negativo.

Identidades Trigonométricas Elementales

TEOREMA XIV-4

$$\operatorname{sen}(90^{o} + x) = \cos x$$
$$\cos(90^{o} + x) = -\operatorname{sen} x$$
$$\operatorname{tg} x(90^{o} + x) = -\cot x$$



DEMOSTRACIÓN

Sea la circunferencia trigonométrica, un ángulo x menor que 90º y positivo, y el ángulo 90º+x:

Identidades Trigonométricas Elementales

DEMOSTRACIÓN

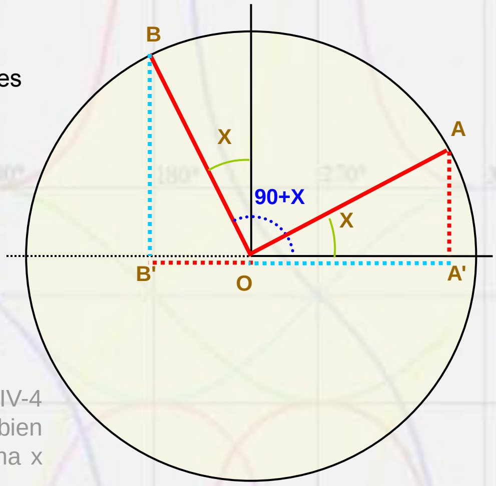
Los Δ OAA' y Δ OBB' son congruentes

AA' = B'O' ; OA' = BB' ; o sea:

$$\operatorname{sen} x = -\cos(90^o + x)$$

$$\cos x = \operatorname{sen}(90^o + x)$$

$$\operatorname{tg} x = -\cot(90^o + x)$$



Admitiremos que este teorema XIV-4 se cumple para cualquier x real, si bien sólo lo hemos demostrado para una x positiva y menor que 90º.

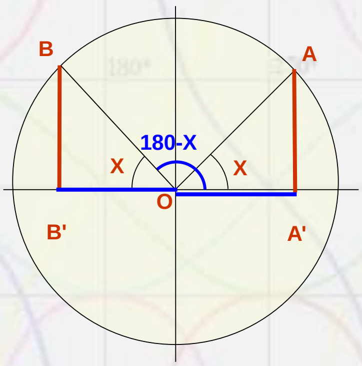
Identidades Trigonométricas Elementales

TEOREMA XIV-5 (Funciones de Ángulos suplementarios)

$$\operatorname{sen}(180 - x) = \operatorname{sen} x$$

$$\cos(180 - x) = -\cos x$$

$$\operatorname{tg}(180 - x) = -\operatorname{tg} x$$



DEMOSTRACIÓN

Suponiendo x positivo y menor que 90º

De la simple inspección de la figura, se deduce el teorema.

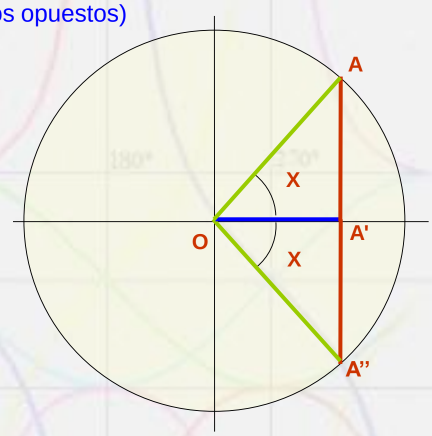
Identidades Trigonométricas Elementales

TEOREMA XIV-6 (Funciones de Ángulos opuestos)

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$



DEMOSTRACIÓN

De la simple inspección de la figura, se deduce el teorema.

Admitiremos (sin demostración, que puede hacerse) que este teorema es válido para cualquier x.

Reducción de un Ángulo al Primer Cuadrante

En muchos casos en que se desea obtener alguna función de un ángulo que no está en el primer cuadrante, o que es **mayor de 360º**, o **negativo**, interesa obtener otro ángulo, del primer cuadrante, positivo y menor que 360º, cuyas funciones trigonométricas guarden relaciones sencillas con las del primero.

1. **Reducir un ángulo al primer círculo.**

Ejemplo: **762°;** le quitamos 360° y 360° quedan **42°**, que tendrá las mismas funciones trigonométricas que 762°.

Ejemplo: **1927°**; lo dividimos entre 360°, da cociente 5 y **residuo 127°**.Luego 127°, en el primer circulo (de 0° a 360°) tiene las mismas funciones trigonométricas que 1927°

Reducción de un Ángulo al Primer Cuadrante

2. Reducir un ángulo del primer círculo al primer cuadrante

Ejemplo: Sea el ángulo de **130º**

180º - 130º = **50º**
(En el 1er cuadrante)

sen (130º) = sen (50º)
cos (130º) = - cos (50º)
tg (130º) = - tg (50º)

Ejemplo: sea el ángulo de **250º**

250º - 180º = 70º
(En el 1er cuadrante)

sen (250º) = - sen (70º)
cos (250º) = - cos (70º)
tg (250º) = tg (70º)

Ejemplo: sea el ángulo de **370º**

370º - 360º = 10º
(En el 1er cuadrante)

sen (370º) = sen (10º)
cos (370º) = cos (10º)
tg (370º) = tg (10º)