La geometría para la vida y su enseñanza. Geometry for life and its teaching.

Ever Lafaid Fernández-Nieto
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
ever_f7@hotmail.com

Recibido: 12 de febrero de 2018.
Aprobado: 28 de mayo de 2018.

***Resumen*—**En la presente monografía se planteó como objetivo general, valorar la importancia del aprendizaje de la geometría para la vida y su enseñanza en el desarrollo del pensamiento. Para ello, en el Capítulo I se aborda la evolución histórica de la geometría. En el Capítulo II, se expone su significación, importancia, clasificación. Asimismo, se presentan aplicaciones en áreas de la ciencia como: medicina, arquitectura, ingeniería civil, e ingeniería aeronáutica. En el capítulo III se describen modelos de enseñanza de la geometría de los autores Duval y Van Hiele; además se presenta la experiencia de algunas universidades sobre la enseñanza de la geometría. La Metodología de Investigación fue de tipo documental, utilizando como fuentes de información el documento escrito, en sus diferentes presentaciones: impreso, electrónico y audiovisual. El diseño de la investigación quedó conformado con las siguientes fases: Selección y delimitación del tema; Acopio de Información o fuentes de información; Organización de los datos y elaboración de un esquema conceptual del tema; Análisis de los datos y organización de la monografía; y Redacción de la monografía o informe de la investigación y presentación final escrita. Producto de la investigación se concluye: La enseñanza de la geometría es indispensable para la construcción, explicación y comprensión del espacio, y se incluye en los currículos del mundo en los diferentes niveles educativos como una de las áreas de las matemáticas. La enseñanza de la geometría, debe ir encaminada a la resolución de problemas y poseer relación con el entorno físico, para la construcción de aprendizaje significativo. Existen diferentes modelos que orientan la enseñanza de la geometría, en los cuales se resalta el Duval que presenta tres niveles cognitivos para la construcción geométrica (visualización, razonamiento, construcción); Van Hiele presenta cinco niveles de razonamiento Geométrico, (Visualización o reconocimiento, análisis, Ordenación, Deducción formal, Rigor), ambos conforman una importante guía en la conducción del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

Palabras clave: geometría, modelos de enseñanza.

***Abstract*—**In the present monograph, the general objective was to value the importance of learning geometry for life and its teaching for the development of thought. For this, Chapter I deals with the historical evolution of geometry. In Chapter II, its significance, importance, classification is exposed. Likewise, applications are presented in areas of science such as: medicine, architecture, civil engineering, and aeronautical engineering. Chapter III describes teaching models of geometry such as Duval, and Van Hiele; It also shows the experience of some universities on the teaching of geometry. The Research Methodology was documentary, using as sources of information the written document, in its different presentations: printed, electronic and audiovisual. The design of the investigation was conformed with the following phases: Selection and delimitation of the topic; Collection of information or sources of information; Organization of data and preparation of a conceptual outline of the subject; Data analysis and organization of the monograph; and Drafting of the monograph or report of the research and final presentation (written). Product of the research concludes: The teaching of geometry is essential for the construction, explanation and understanding of space, and is included in the curricula of the world in the different educational levels as one of the areas of mathematics. The teaching of geometry should be aimed at solving problems and have a relationship with the physical environment, for the construction of meaningful learning. There are different models that guide the teaching of geometry, in which the Duval is highlighted, which has three cognitive levels for geometric construction (visualization, reasoning, construction). Van Hiele presents five levels of Geometric reasoning, (Visualization or recognition, analysis, Ordination, Formal Deduction, Rigor), both form an important guide in the conduct of the teaching and learning process of Geometry.

Keywords: geometry, teaching models.

*Autor para correspondencia.
Correo electrónico: ever_f7@hotmail.com (Ever Lafaid Fernández Nieto).
La revisión por pares es responsabilidad de la Universidad de Santander.

Forma de citar: E. L. Fernández-Nieto, “La geometría para la vida y su enseñanza”, Aibi revista de investigación, administración e ingeniería, vol. 6, no. 2, pp. 33-61, 2018.

I. INTRODUCCIÓN

La Geometría tiene un gran potencial en todos los campos del saber, su aplicación en todas las ciencias aumenta su importancia, y es en el ámbito educativo, desde básica a universitaria, incluyendo educación continua y capacitacióntécnica, ya sea presencial o a distancia dónde se busca desarrollar en los estudiantes las capacidades cognitivas y conducirlo al desarrollo potencial de sus capacidades, por ende es el docente el mayor responsable del éxito o fracaso de este proceso, dado que es quientiene en sus manos el empleo de estrategias y recurso para un aprendizaje de la geometría efectivo, entendiendo por efectivo a la aplicabilidad y el significado que tengan dichos contenidos programáticos en su desempeño laboral o cotidiano [1].

La enseñanza de la geometría se encuentra presente como parte de la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles educativos, en el nivel de primaria y secundaria ya que estos son contenidos de matemática obligatorios y en el sistema superior como materia especifica en carreras relacionadas con Educación, arquitectura, ingeniería y demás afines que necesitan de conocimientos geométricos para la práctica de sus profesiones, dada la importancia que tiene esta en cuanto al estudio de dimensiones y espacios. Así bien, los parámetros adecuados para la enseñanza de la geometría actualmente rompen con el paradigma de clases tradicionalistas, excesiva aritmética y geometría métrica y se enfatiza en las exigencias del sistema educativo actual que busca la formación de profesionales competentes en sus diferentes campos y así útiles a su sociedad.

Lograr este reto no es sencillo, por cuanto persiste la problemática de los estudiantes de dificultárseles el aprendizaje de la geometría, naturalmente, porque los modelos de enseñanza tradicionales se conservan en la práctica actual y no son los más eficaces. Los modelos de enseñanza de la geometría que apliquen los docentes en los distintos niveles y modalidades de la educación en Venezuela deben estar focalizados en el aprendizaje del estudiante que respondan de manera asertiva a las necesidades que demanda la sociedad actual, para lograr una enseñanza y aprendizaje más eficiente.

La educación superior, a través de sus funciones de enseñanza, investigación y extensión, es una compleja organización destinada esencialmente a gerenciar el conocimiento [2]. Por ello, es importante que los docentes conozcan y comprendan los diversos modelos y enfoques pedagógicos que guían las prácticas educativas, principalmente porque los nuevos paradigmas educacionales demandan nuevos desafíos y competencias en el quehacer docente [3]. Es decir que las nuevas tecnologías de la información y comunicación, exigen un docente eficiente, eficaz y competitivo, abierto a los nuevos paradigmas educacionales, que transforman de manera significativa los procesos de enseñanza, aprendizaje, métodos, técnicas, contenidos e instrumentos para lograr una formación integral de calidad en los estudiantes [4].

En consecuencia, ¿qué se debe hacer para valorar la importancia del aprendizaje la geometría para la vida como parte fundamental de la cultura del hombre? En esta monografía, se pretende responder a esta interrogante, planteándose como objetivo general: Valorar la importancia del aprendizaje la geometría para la vida y su enseñanza para el desarrollo del pensamiento.

A fin de desarrollar este objetivo, se considera necesario: Relatar la evolución histórica de la geometría. Conceptualizar la geometría. Por último, Reseñar modelos de enseñanza de la geometría y la experiencia en instituciones de educación universitaria.

Para tratar de lograr los objetivos específicos planteados, en el Capítulo I se aborda la evolución histórica de la geometría desde su aparición en Babilonia, India, China, Egipto, Grecia y la Edad Media. Pasando por las nuevas geometrías y las geometrías contemporáneas. En el Capítulo II, se analiza la temática de la geometría; se expone su significación, importancia, clasificación. Asimismo, se presentan aplicaciones en áreas de la ciencia como: medicina, arquitectura, ingeniería civil, e ingeniería aeronáutica.

En el capítulo III se describen algunos modelos de enseñanza de la geometría como Duval, y Van Hile; se muestra la experiencia de algunas universidades la enseñanza de la geometría.Conocer los diversos planteamientos pedagógicos y estratégicos aplicados, permite disponer de una visión general de las grandes posibilidades pedagógicas y de organización para la educación superior.

La Metodología de Investigación fue de tipo documental, utilizando como fuentes de información el documento escrito, en sus diferentes presentaciones: impreso, electrónico y audiovisual. El diseño de la investigación quedó conformado con las siguientes fases: Selección y delimitación del tema; Acopio de Información o fuentes de información; Organización de los datos y elaboración de un esquema conceptual del tema; Análisis de los datos y organización de la monografía; y Redacción de la monografía o informe de la investigación y presentación final de forma escrita.

Producto de la investigación se concluye: La enseñanza de la geometría, debe ir encaminada a la resolución de problemas y poseer relación con el entorno físico, para la construcción de aprendizaje afectivo. Existen diferentes modelos que orientan la enseñanza de la geometría, en los cuales se resalta el Duval que presenta tres niveles cognitivos para la construcción geométrica (visualización, razonamiento, construcción), el Van Hile que presenta cinco niveles de razonamiento Geométrico, (Visualización o reconocimiento, análisis, Ordenación, Deducción formal, Rigor), ambos conforman una importante guía en la conducción del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

II. DESARROLLO TEMÁTICO

a. Evolución histórica de la geometría

Desde la antigüedad hasta la actualidad, se habita en un mundo geométrico. El Universo de formas: esferas, pirámides, triángulos, rectángulos, círculos, son algunas de las representaciones que se observan en el día a día. Existen anillos circulares en el arco iris, hexágonos en los paneles de abeja, cubos en los cristales de sal. Es de gran importancia conocer su evolución histórica por cuanto presenta una gran variedad de material que puede llamarse geometría práctica: Los primeros conocimientos geométricos que tuvo el hombre consistían en un grupo de reglas prácticas; estos hombres llegaron a formas geométricas a partir de la observación de la naturaleza. Para que la geometría fuera adoptada como ciencia tuvieron que pasar muchos siglos, hasta llegar a los griegos. A continuación, se presenta, progresivamente, la aparición de la geometría como ciencia.

b. La geometría en Babilonia

Babilonia fue construida en el tercer milenio antes de Cristo, en el corazón de Mesopotamia, sobre el río Éufrates. Después de las grandes obras de Nabucodonosor en el sexto siglo antes de Cristo, “sobrepasó en esplendor cualquier ciudad del mundo conocido”, según Herodoto. Su sitio fortificado por altas murallas continuas la hacían aparentemente inexpugnable; sin embargo, fue tomada dos veces, en 539 a.C. por el persa Ciro y en 523 a.C. por Darío. En ambos casos el sitiador, desesperado, estuvo a punto de renunciar, pero una estratagema logró la caída de la gran ciudad, de la cual Bagdad, fundada en 762 a.C., es, en el presente, la heredera [5].

Hace cerca de 6000 años sucedió un acontecimiento histórico que ejemplificaría la aplicación de esas reglas prácticas sería la invención de la rueda. Tal vez de ahí surgió el afán por descubrir las propiedades de la circunferencia y esto los condujo a estudiar la relación que existe entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. Además apoyándose en la astronomía y conociendo que el año tiene aproximadamente 360 días, dividieron la circunferencia en 360 partes iguales, obteniendo el grado sexagesimal, [6]. Las primeas indicaciones de un sistema de medida se encontraron en la civilización babilónica: ellos perfeccionaron la agrimensura y determinaron métodos para calcular áreas de figuras planas sencillas. Es probable que el hombre primitivo midiera longitudes comparándola con ciertas partes del cuerpo: pie, brazo, brazos abiertos. Estos métodos surgieron de la necesidad de medir la tierra, realizar viajes, construir edificaciones y su preferencia por el estudio de cuerpos celestes [7].

En la página web de la Agencia EFE, edición américa, se presenta un artículo relacionado con este tema, titulado “Los babilonios usaron la geometría para estudiar Júpiter antes de lo pensado”, y en el mismo exponen:

Los babilonios aprendieron a usar cálculos geométricos para los estudios astronómicos catorce siglos antes de lo que se creía, según prueba el análisis de unas tablas halladas de esa civilización que publica hoy la revista Science. Fue más de un siglo antes de Cristo en Asia Menor y no en el siglo XIV en Europa cuando la humanidad comenzó a usar la geometría para estudiar el espacio, según el informe del investigador Mathieu Ossendrijver, de la Humboldt University de Berlín.

Los babilonios aportaron al surgimiento de la geometría, y hoy día con mayor impulso con el descubrimiento del investigador Mathieu Ossendrijver, de la Universidad Humboldt de Berlín la cual describe que esta civilización babilónica empleaba la geometría avanzada para calcular la posición de Júpiter en el Sistema Solar. Según explica [8]:“La idea de calcular el desplazamiento de un cuerpo en un espacio con la velocidad y el tiempo se suele remontar a la Europa del siglo XIV, pero yo muestro que en cuatro antiguas tablillas cuneiformes babilónicas, el desplazamiento de Júpiter a lo largo de la eclíptica se calcula sobre la superficie de una figura trapezoidal obtenida dibujando su desplazamiento diario respecto al tiempo”.

En resumen, los conocimientos geométricos babilónicos tiene un rango Pre-científico con tendencia a la cuantificación, consecuencia lógica de la condición nómada de aquellos pueblos, cuyas urgencias biológicas eran más compatibles con la necesidad de contar que con la de medir, y así, por ejemplo, su unidad de medida de volumen no era el cubo de la unidad lineal, sino un ladrillo que tenía por base la unidad que utilizaban para medir superficies y por altura la unidad que empleaban para medir alturas, procedimiento híbrido que perturba el cálculo de volúmenes.

c. La geometría en la India

India data del año 3000 antes de Cristo. En esta primera civilización surgieron dos grandes ciudades, Mohenjodaro y Harappa, donde se construyeron grandes templos. Se conoce con el nombre de Periodo Védico a esos tiempos más remotos de la civilización hindú.Los primitivos habitantes fueron los dravidas, de cuya existencia se tiene información por unos libros antiguos llamados los Vedas. Los dravidas eran de baja estatura y de piel oscura, que se habían impuesto a otras tribus nativas. Vivían en comunidades y habían desarrollado una gran civilización, semejante a la del Egipto y la Mesopotamia [9].

[10] señala, que se han encontrado vestigios que hablan de la existencia de unos conocimientos geométricos, que pueden ser contemporáneos con los babilónicos, o quizá derivados de ellos como consecuencia del comercio practicado en Babilonia por los mercaderes nómadas de India, Siria e incluso China. El documento geométrico indio más antiguo que se conoce es el "Sulva-Sutra" de Apastamba, anterior al siglo Vil a. de J.C, en el que aparecen una compilación de conocimientos. Uno de ellos, que habla de cómo la ciencia india estaba y evolucionaba en perfecta sincronía con su religión, es el empleo sistemático de triángulos rectángulos de lados enteros a partir de un rectángulo de lados proporcionales a 3 y 4, para la construcción de los altares, cuyas secciones tenían forma de trapecios isósceles. El área de estos trapecios lo calculaban transformándolos en rectángulos mediante la transposición de los dos triángulos rectángulos que se forman tomando como hipotenusas los lados iguales y como catetos mayores la altura del trapecio. Además, figuran proposiciones y propiedades tales como que el cuadrado construido sobre la diagonal de un rectángulo equivale a la suma de los cuadrados construidos sobre el lado mayor y el menor, o como que el cuadrado construido sobre la diagonal de un cuadrado es doble que éste. También aparecen procedimientos para la construcción de un cuadrado cuya área sea igual la suma del área de otros dos o para transformar un rectángulo en un cuadrado equivalente (p.11).

Por otra parte, [11] manifiesta, en la India, la ciencia de la geometría se originó en relación con la construcción de los altares destinados a sacrificios védicos. Sulbas son estudios en geometría hindú temprano. El Sulbas o la Sulba Sutras son los manuales para la construcción de los altares, La ciencia de la Sulba ha descrito una serie de postulados, que deben haber sido tácitamente asumidas por los geómetras de la Sulba para las operaciones geométricas. Los postulados de la Sulba están conectados con la división de figuras tales como líneas rectas, rectángulos, círculos y triángulos, los postulados:

1. Una línea recta finita dada se puede dividir en cualquier número de partes iguales.
2. Un círculo se puede dividir en cualquier número de partes iguales en diámetros de dibujo
3. Cada diagonal de un rectángulo biseca ella.
4. Las diagonales de un rectángulo bisecan entre sí.
5. Las diagonales de un rombo bisecan entre sí en ángulos rectos
6. Un triángulo se puede dividir en un número de partes iguales y similares dividiendo los lados en un número igual de piezas y luego unirse a los puntos de división de dos en dos.
7. Un triángulo isósceles se divide en dos partes iguales por la línea que une el vértice con el punto medio de la base.
8. Un triángulo formado por la unión de las extremidades de un cuadrado al punto medio del lado opuesto es igual a la mitad del cuadrado.
9. Un cuadrilátero formado por las líneas que unen el punto medio de los lados de un cuadrado tiene una media zona de la del cuadrado original.
10. Un paralelogramo y un rectángulo que están en la misma base y dentro de las mismas paralelas son iguales entre sí.
11. El cuadrado máximo que puede ser descrito dentro de un círculo es el que tiene sus esquinas en la circunferencia del círculo.

En general, muchas fórmulas matemáticas núcleo y teoremas se originan en la India. Las raíces del actual progreso en álgebra y astronomía se pueden rastrear de nuevo al trabajo realizado por nuestros matemáticos antiguos.

d. La geometría en China

[10] manifiesta que son pocas las referencias que se tienen respecto a sus conocimientos geométricos. Parece probado que la primera civilización china propiamente dicha existió hacia el año 1.500 a. de J.C, pero el documento geométrico chino más antiguo se posee es el "Tcheu-Pei"^, en el que se encuentra la propiedad característica del triángulo de lados 3, 4 y 5 como fundamento del nivel que permite "la medida de lo inaccesible: el cielo, del mismo modo que la agrimensura para la tierra".

e. La geometría en Egipto

[6]señala, que la base de su civilización era la agricultura. Aquí también se llevó a cabo la aplicación de los conocimientos geométricos a la medida de la tierra y tal vez sea ésta la causa del por qué se diera a esta parte de las Matemáticas, el nombre de Geometría, que significa medida de la tierra. En efecto, la fama de sabiduría de los egipcios se extendió por el mundo civilizado de la época y así estudiantes y eruditos de otros países fueron a estudiar a Egipto, entre ellos los griegos, quienes estudiaron los métodos de agrimensura y el cálculo. A ese conjunto llegaron a llamar geometría, con el significado de medida de la tierra [7].

Aibi revista de investigación, administración e ingeniería. Volumen 6, Número 1, Enero - Junio de 2018, ISSN 2346-030X PP 33-61.

El Antiguo Egipto es la mayor civilización tecnológica de la antigüedad, el triunfo de la eficiencia y la inteligencia. Se pasa del neolítico a la historia en 2.500 años de acelerados avances técnicos. Los conocimientos científicos de los egipcios, su medicina, sus construcciones, su refinamiento siguen sorprendiendo y atrayendo. Respecto a sus matemáticas, tenían unos conocimientos considerablemente avanzados. Sin llegar a la madurez que más adelante tendrían los griegos los egipcios supieron solucionar los problemas que se les planteaban: tras la inundación anual del Nilo, las lindes desaparecían y tenían que volverlas a marcar, las construcciones (pirámides, templos,...), el comercio, los repartos, etc. Sus cálculos no eran abstractos, buscaban lo más práctico aunque no tuvieran la resolución y la reflexión teórica que después alcanzarían los griegos. Al contrario que a los matemáticos griegos no les preocupó la resolución teórica ni la reflexión sobre problemas matemáticos (numéricos, aritméticos o geométricos), sino su inmediata aplicación práctica. Pero, sin embargo, fueron precursores. Los más importantes matemáticos griegos viajaron por Egipto y Babilonia aprendiendo de estos pueblos [7].

Como ya se mencionó, los conocimientos geométricos de los egipcios también eran considerables. Sin dichos conocimientos no habrían podido construir las pirámides o medir tierras, etc... la geometría egipcia junto a la babilónica fue la precursora de la potente geometría griega. Los primeros matemáticos griegos (Tales de Mileto, Pitágoras, entre otros) viajaron por Babilonia y Egipto antes de realizar sus tratados.

[12] manifiestan que los egipcios dominaban perfectamente los triángulos gracias, a los anudadores. Los anudadores egipcios hacían nudos igualmente espaciados que servían para medir; fueron los primeros en observar que, uniendo con forma de triángulo, cuerdas de ciertas longitudes se obtiene un ángulo recto, también conseguían mediante estos nudos triángulos rectángulos. Pitágoras recogió toda esta experiencia geométrica para su teorema. Es decir, los egipcios ya conocían la relación entre la hipotenusa y los catetos en un triángulo rectángulo. Utilizaban el más tarde se conoció como Teorema de Pitágoras, pero de forma práctica, no sabían demostrarlo. (p. 3)

Los mismos autores, señalan que entre las fórmulas que tenían para medir áreas, se pueden citar las de superficie del cuadrado (a partir del triángulo), del rectángulo, del rombo y del trapecio. En cuanto al área del círculo utilizaron una fórmula que daba a p un valor bastante aproximado. En el Papiro de Rhind se encuentra que los egipcios situaban correctamente tres cuerpos geométricos: el cilindro, el tronco de la pirámide y la pirámide. La utilidad de cálculo volumétrico resulta fácil: se precisaba, entre otras cosas, para conocer el número de ladrillos necesarios para una construcción. (p. 5).

Ciertamente, los egipcios aportaron a la geometría los sistemas de numeración y fórmulas para medir las tierras y reestablecer sus límites cuando las inundaciones las borraban. Sus monumentales construcciones y sus canales y embalses revelan grandes conocimientos de ingeniería. La geometría en el antiguo Egipto estaba muy desarrollada, como admitieron Heródoto, Estrabón y Diodoro, que aceptaban que los egipcios habían inventado la geometría y la habían enseñado a los griegos, aunque lo único que ha perdurado son algunas fórmulas u algoritmos para calcular volúmenes, áreas y longitudes, cuya finalidad era práctica. Los historiadores antiguos relataron que el conocimiento de esta civilización sobre geometría pasó íntegramente a la cultura griega a través de Tales de Mileto, los pitagóricos y, esencialmente, de Euclides.

f. La geometría en Grecia

En Grecia, es donde comienza la geometría como ciencia deductiva. Los griegos no se sintieron satisfechos hasta obtener explicaciones racionales en las cuestiones generales y especialmente, de las geométricas. Los griegos perfeccionaron y aplicaron la geometría como una rama del saber. La enseñaron en sus escuelas y lograron despertar entre sus filósofos un gran interés por los nuevos conocimientos. Uno de ellos fue Tales de Mileto, nacido en el siglo VI a. C. Tales de Mileto fue uno de los primeros científicos griegos en insistir en que los hechos geométricos debían ser establecidos sobre la base del razonamiento lógico [13].

Así, dice la Historia, fue como el Fenicio Thales (639-548 a. J.C), considerado el primer geómetra y también el primero de los siete sabios griegos, introdujo la Geometría en Grecia. Recibió de los sacerdotes egipcios sus conocimientos geométricos, probablemente libres de su connotación esotérica y religiosa, que procuraban no divulgar. Dichos conocimientos adquirieron en sus manos, con ayuda de la lógica y del razonamiento, rango científico, imprimiendo en ellos la huella que aún perdura. De Egipto se trasladó a Mileto donde fundó la Escuela Jónica, cantera de filósofos y sabios. Aparte del teorema que lleva su nombre sobre la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes, también conocía la propiedad de ser recto el ángulo inscrito en una semicircunferencia. Utilizó la circunferencia para la medida de ángulos, demostró la igualdad de los ángulos de la base de un triángulo isósceles, dio por evidente la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice (que fue demostrada posteriormente por Euclides), así como que cualquier diámetro divide a la circunferencia en dos partes iguales. Se le atribuye también la deducción de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos, y la determinación de un triángulo a partir de la base y de sus ángulos adyacentes. Dentro de lo anecdótico, la historia cuenta como hizo gala de sus conocimientos astronómicos prediciendo un eclipse solar, o como dentro de su faceta de hábil hombre de estado se confesaba un enfervorizado defensor del celibato [10].

El mismo autor manifiesta que a la muerte de Thales, su discípulo Anaximandro, presunto inventor de los relojes de sol, se hizo cargo de la dirección de la Escuela Jónica, que desapareció hacia el año 400 a.C, cuando fue destruida Mileto durante la dominación persa, siendo exilados o presos todos los intelectuales jónicos, entre los que destaca como último representante Anaxágoras de Clazomene, a quien se le atribuye los primeros trabajos, ya en prisión, sobre la cuadratura del círculo.

[13], manifiesta que, desaparecida la Escuela Jónica, la ciencia geométrica se desplazó primeramente a Sicilia y más tarde a las colonias de la Magna Grecia, al sur de Italia, siendo en la ciudad de Crotona donde se estableció el otro matemático griego sobresaliente Pitágoras, quién vivió en el siglo V a.C., se considera que fue alumno de Tales. Pitágoras enseñó matemática, filosofía y religión.

La evolución histórica de la geometría en Grecia que se presenta de aquí en adelante, es presentada por [10] por cuanto menciona detalladamente los griegos más importantes con sus aportes a la geometría.

Hacia el año 509 a. C., Pitágoras fundó lo que Aristóteles llamó la Escuela Itálica, que en el fondo no fue sino una hermandad de tipo religioso, cuyo símbolo era el pentágono estrellado y cuyo lema era "todo es número". En ella sus adeptos se purificaban mediante la Geometría como ciencia y la Música como arte, y se les transmitían los conocimientos solamente bajo juramento.

A Pitágoras se le atribuye el teorema que lleva su nombre relativo a los triángulos rectángulos, aunque, en parte por la pérdida de documentos de la época y en parte por el carácter secreto de su Escuela, no se disponen de datos que permitan saber cuál fue la demostración que dio del mismo. Sin embargo, de los textos de los historiadores de la época se desprende que él o sus alumnos" descubrieron que la relación entre el lado de un cuadrado y su diagonal es un número cuyo cuadrado es 2, que llamaron irracional por no comportarse como los números hasta entonces conocidos, sino como un ente de razón.

También se les atribuye el descubrimiento de propiedades como la de ser el círculo y la esfera los cuerpos de mayor área y volumen de todos los de igual perímetro y superficie, respectivamente. Y aunque no es opinión generalizada, se les supone autores de la teoría de la construcción de las figuras cósmicas, nombre que dieron a poliedros regulares tales como el hexaedro, octaedro y dodecaedro.

Pitágoras fue una de las figuras más influyentes en la historia de su época, haciendo que la Geometría jugara un importante papel en la forma de vida y en la religión, y relacionándola más con el puro amor por la sabiduría que con las exigencias de la vida práctica. Una revuelta de carácter político le obligó a huir a Metaponte donde murió hacia el año 500 a. de J.C.

Los más eminentes sucesores de Pitágoras fueron Hipócrates de Chios, contemporáneo de Anaxágoras, y Arquitas de Tarento (428-355 a. de J.C). En el primero es de destacar sus trabajos sobre la cuadratura de las lúnulas, figuras limitadas por arcos de circunferencias, y su contribución a la resolución del problema de Délos o de la duplicación del cubo, transformándolo en el de la doble media geométrica entre dos segmentos, uno doble que el otro. En el segundo es de destacar la solución dada al problema de la duplicación del cubo, apoyándose en los trabajos de Hipócrates, mediante la intersección de un cono circular, un cilindro circular y una superficie teórica. También fue decisiva su intervención ante el tirano Dionisio para salvarle la vida a su amigo Platón.

Con Platón (430-347 a. de J.C.) nació la llamada Escuela Ateniense y con él comenzó el auge de la Geometría en Grecia, adjudicándole el papel de creador o introductor del método de análisis para la resolución de los problemas geométricos. Viajó primeramente a Egipto, de cuyos sacerdotes adquirió sus primeros conocimientos geométricos. De vuelta a Atenas se hizo discípulo de Sócrates para posteriormente viajar a la Italia meridional, donde estudió con los pitagóricos. Después de haber sido apresado y sentenciado a muerte por Dionisio, príncipe de Siracusa, regresó de nuevo a Atenas y fundó la Escuela Platónica, ubicada en el gimnasio de Akademo en cuyo centro estaba el altar dedicado al dios Eros y en cuya puerta figuraba la famosa inscripción: "No entre aquí nadie que ignore la Geometría".

Tal como dice la historia, la contribución específica personal de Platón fue más significativa en el campo de la Filosofía que en el de la Geometría, a la cual asignó un papel central entre las cosas sensibles y las ideas, cuyo mundo creó a imagen y semejanza de la clasificación de las formas geométricas, proyectando al exterior el proceso interno de su espíritu filosófico.

En el "Timeo" expuso sus ideas sobre los "sólidos regulares" asociándoles a los cuatro elementos: fuego-tetraedro, tierra-cubo, aireoctaedro y agua-icosaedro dejando el dodecaedro como símbolo deluniverso". Influyó notablemente en que la Geometría ocupara una parte esencial del curriculum necesario para la formación del hombre de Estado, y tuvo un papel preponderante como inspirador y director de otros geómetras, entre los que destacaron: Menecmo, que contribuyó a la teoría, apenas esbozada, de las secciones cónicas; Dinostrato, hermano del anterior, que "resolvió" la cuadratura del círculo a partir de la curva ideada por Hipias de Elea para la trisección de un ángulo, curva que a partir de entonces se conoció con el nombre de "cuadratriz".

Sin duda fue Eudoxio de Cnido el discípulo más aventajado y querido de Platón, y a quien se deben entre otras, la demostración de los teoremas enunciados por Demócrito (460-370 a. de J.C.) sobre el volumen de la pirámide y del cono, la demostración sobre la proporcionalidad entre las áreas de los círculos y los cuadrados de sus diámetros, y sobre la génesis de la curva "hipopeda", hoy lemniscata, que definió como intersección de una esfera y un cilindro con una generatriz tangente a aquella. Según el propio Arquímedes, fue Eudoxio quien primero enunció el siguiente axioma que hoy se conoce como "axioma de Arquímedes"": «dadas dos magnitudes tales que sean del mismo tipo y que ninguna de las dos sea cero, se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que exceda a la otra». Con Eudoxio de Cnido se puede decir que terminó la primera época de la Geometría griega, hacia el año 300 a. de J.C, en que la creación del Museo de Alejandría atrajo a la mayoría de los estudiosos griegos, convirtiéndolo en un centro de enseñanza durante aproximadamente tres siglos, en los que laGeometría empezó a perder el carácter empírico que tenía hasta entonces para asumir el rango de ciencia deductiva.

Con la dinastía de los Lágidas, fundada por Ptolomeo I, sucesores de Alejandro Magno y protectores de sabios y artistas, la Geometría alcanzó su punto álgido con la figura del gran sabio Euclídes. Aunque no hay una opinión unánime al respecto, la mayoría de los historiadores fijan sus orígenes en Grecia hacia el año 330 a. de J.C, pasando de allí a Alejandría, donde fundó la llamada Escuela de Alejandría. Su obra más conocida es los "Elementos", en la que están recogidos todos los conocimientos geométricos anteriores de una forma sistemática. El andamiaje lógico de esta obra, libro de texto intemporal y el mayor "bestseller" de la historia después de la Biblia, habla de la influencia que en su ejecución tuvo Aristóteles, para quien la Geometría era una «ciencia deductiva o racional, esto es: que puede adoptar la forma de un sistema de conclusiones obtenidas de un cierto número de premisas fundamentales por medio de sucesivos silogismos».

Los "Elementos" están divididos en trece libros: del I al IV tratan de la Geometría plana, el V de las proporciones, el VI de las magnitudes inconmensurables, del Vil al IX de la Aritmética de los números racionales, el X de la Aritmética de los números irracionales y del XI al XIII de la Geometría del espacio. Están estructurados de forma tal que empiezan dando primeramente las definiciones de punto, línea en general, línea recta, plano, ángulos, figura, círculo, triángulos, cuadriláteros y rectas paralelas. A las definiciones siguen los seis postulados, continuando posteriormente con los axiomas, a los que Euclides prefería llamar "nociones comunes", y cuyo grado de evidencia es mayor que el de los postulados, para terminar la obra con los teoremas y problemas, demostrados y resueltos apoyándose en los axiomas y postulados con un rigor lógico^^ y cuyas soluciones se pueden obtener mediante construcciones con regla y compás.

Otras obras de Euclides son: los "Porismas", los "Datos", la "División de Figuras", los "Fenómenos" y la "Óptica", de las cuales merece especial mención la segunda, libro complementario de los "Elementos" y, seguramente, escrita para ser usada en la Universidad de Alejandría, ya que sus 95 proposiciones se pueden considerar como una guía para el análisis de los problemas de Geometría.

A Euclides le sigue cronológicamente Arquímedes de Sirácusa (287-212 a. de J.C.), el sabio más profundo y científico de la antigüedad clásica. En él se coordinan armoniosamente la visión exterior, que contempla la Naturaleza para descubrir sus leyes, y la visión interior, que hace progresar la Ciencia. Su nombre, en justicia, ha de figurar en las más altas cimas de la acepción más moderna de la ingeniería, de las Matemáticas en general y de la Geometría en particular. Su obra, impregnada de una gran originalidad, desde las ideas hasta los métodos, es una aportación personal al planteamiento de nuevas cuestiones que resuelve de una manera genial, convirtiendo la Geometría estática de Euclides en una Geometría cinética, estableciendo una comunión perfecta entre la razón pura y la experiencia. Es de lamentar que todo ello no pudiera contribuir a un avance más rápido de la Geometría por haber sido ignorada su obra hasta casi la época renacentista.

Arquímedes estudió en Alejandría y regresó posteriormente a Siracusa, donde consiguió el favor y la protección del rey Hierón gracias a las aplicaciones hechas de su saber teórico al arte de la guerra. Además de todas sus aportaciones al mundo de la Física y la Mecánica, son de destacar, entre su fecunda y vasta labor en pro de la Geometría, los métodos generales, basados en las aproximaciones sucesivas, para el cálculo de las áreas de las figuras curvilíneas y los volúmenes de los cuerpos limitados por superficies curvas, que aplicó al círculo, a la elipse, al segmento parabólico, del cual obtuvo su cuadratura, a la superficie comprendida entre dos espiras sucesivas de una hélice, al segmento esférico, y al cilindro, cono, elipsoide, paraboloide, hiperboloide y esfera.

Por último, no se puede terminar de hablar de la obra de Arquímedes sin hacer mención ha su método para el cálculo del número n, al estudio de los poliedros semi-regulares, y, como no, a la espiral que lleva su nombre. El destino que unas veces es cruel y otras caprichoso, cuando no ambas cosas a la vez, hizo que una de las inteligencias más preclaras y prodigiosas de la Historia fuera víctima de la ignorancia, necedad y brutalidad de un soldado. Apolonio de Pérgamo, posterior a Arquímedes, fue el tercer gran geómetra de la edad de oro de la Geometría griega y el último de la antigüedad clásica. Aunque se sabe poco de su vida, se cree que vivió entre los años 262 y 190 a. de J.C. Estudió primeramente en la Universidad de su ciudad natal, continuando en la de Alejandría, donde posteriormente se dedicó a la enseñanza.

De Apolonio se puede decir que fue el primer geómetra especialista de la historia, ya que sus esfuerzos estuvieron orientados exclusivamente al estudio de las cónicas, sobre las que escribió ocho libros que configuran su famoso "Tratado de las cónicas". De los ocho libros se conocen siete: el primero trata de la generación de la circunferencia, elipse, parábola e hipérbola, a la que llama de las "secciones opuestas"; el segundo de los diámetros, ejes y asíntotas rectilíneas; el tercero de los teoremas necesarios para la formación de los "lugares sólidos", que son aquellos cuya construcción se obtiene cortando conos o cilindros; el cuarto de las intersecciones de las cónicas entre sí; el quinto trata de los máximos y mínimos; el sexto de las condiciones de igualdad y semejanza de las secciones cónicas; el séptimo de los teoremas necesarios para solucionar determinadas cuestiones, las cuales se resuelven en el libro octavo reconstruido por Halley a principios del siglo XVIII.

Apolonio tuvo la genial idea de estudiar las cónicas como secciones de un mismo cono circular oblicuo por planos distintos, superando en ello a Euclides y Arquímedes, que las estudiaban como secciones por un plano perpendicular a una generatriz de un cono circular recto, cuyo ángulo cónico fuese recto (parábola), agudo (hipérbola) u obtuso (elipse).

Es de resaltar la gran trascendencia que tuvo la obra de Apolonio en los descubrimientos llevados a cabo posteriormente por Kepler y Newton, así como en el estudio proyectivo de las cónicas realizado por Steiner veinte siglos después más rigurosamente.

Con el fin de Apolonio comenzó la decadencia de la Geometría griega. Sus contemporáneos y sucesores, antes astrónomos que geómetras, sededicaron más a estudiar la obra hecha hasta entonces que a enriquecerla con nuevas aportaciones. Entre ellos se deben citar a:

- Eratóstenes (276-192 a. de J.C), director de la Biblioteca de Alejandría e inventor de la famosa criba para la determinación de los números primos, y del "mesolabio", instrumento ideado para resolver gráficamente el problema de la duplicación del cubo.

- Nicomedes (250-150 a. de J.C), inventor de la concoide y del aparato que permite dibujarla de forma continua, con la cual resolvió tanto el problema de la duplicación del cubo como el de la trisección del ángulo.

- Diocles (250-100 a. de J.C), que inventó la cisoide, curva de análoga aplicación que la concoide.

- Perseo (hacia el 130 a. de J.C), que, al intentar generalizar la teoría de las cónicas, inventó las curvas espíricas obtenidas como sección de una superficie teórica por un plano.

- Hiparco (hacia el 150 a. de J.C), el más ilustre astrónomo griego, que inventó la trigonometría rectilínea y esférica, y sentó las bases de la proyección estereográfica.

- Herón de Alejandría (hacia el siglo I a. de J.C), que inventó la famosa fórmula que lleva su nombre para hallar el área del triángulo en función de sus lados, y fue el último representante de la primera etapa de la Escuela de Alejandría, cuya decadencia coincidió con la desaparición de la dinastía de los Lágidas, el triunfo del cristianismo y el comienzo de la dominación romana.

Bajo los cinco siglos del mandato de Roma, la Geometría empezó a estancarse, como consecuencia lógica del absoluto desprecio que los romanos profesaban por las ciencias exactas^^; tal es así que, cuando tenían necesidad de aplicarlas a los trabajos topográficos y de construcción, recurrían a los científicos griegos. Aunque también hubo algún tratadista teórico digno de mención, como Vitrubio (63 a. de J.C.-14 d. de J.C), que escribió el tratado 'De Architectura", en el que hay algunas indicaciones sobre la planta y el alzado de los edificios.

No obstante, durante este período se puede hablar de la existencia de una segunda y última etapa de la Escuela de Alejandría en la que destacaron geómetras como:

- Menelao, durante el siglo I de nuestra era, que fue autor del "Tratado de las Esféricas", donde hace un estudio profundo de los triángulos esféricos, cuyos lemas y teoremas fueron posteriormente aplicados a los triángulos planos. trigonometría rectilínea y esférica, en el que figura la propiedad de que en un cuadrilátero Inscrito en una circunferencia el producto de las diagonales es igual a la suma del producto de los lados opuestos. También escribió "Planisferio", obra en la que desarrolla, a partir de los trabajos de Hiparco, la teoría de la proyección estereográfica, aplicada en cartografía.

- Pappus, hacia el año 385, que escribió, entre otros, ocho libros agrupados bajo el nombre de "Colecciones Matemáticas", en los que figura la determinación del área y del volumen de las superficies de revolución a partir del centro de gravedad de la línea o de la superficie que los engendran, y que sirvió más tarde a Guldin para enunciar el teorema que lleva su nombre. También se recogen en ellos: la propiedad fundamental de la razón doble o armónica, germen de la Geometría Proyectiva; el concepto de directriz de las secciones cónicas; y la definición, así como la utilización, de los métodos de análisis y síntesis para la resolución de un mismo problema geométrico.

- Sereno de Lesbos, que obtuvo la elipse como sección de un cilindro por un plano.

- Proclo (412-485), más filósofo que geómetra, a quien se le atribuye la definición de elipse como la trayectoria del punto de un segmento cuyos extremos se desplazan sobre dos rectas que se cortan.

- Eutocio, hacia el año 540, cuya obra "Comentarios", es el único testimonio de algunos de los trabajos de Arquímedes y Apolonio.

Se observa entonces, que la geometría es una de las ciencias más antiguas. Inicialmente constituida en un cuerpo de conocimientos prácticos en relación con las longitudes, áreas y volúmenes. La civilización babilónica fue una de las primeras culturas en incorporar el estudio de la geometría. La invención de la rueda abrió el camino al estudio de la circunferencia y posteriormente al descubrimiento de número pi. Los griegos dieron grandes aportes al avance de la geometría, manteniéndose efectiva la Geometría euclidiana.

g. *En la Edad Media*

[10] relata que con la caída del Imperio Romano y la invasión árabe, hacia el año 641, desapareció, junto con su Biblioteca, la Escuela de Alejandría, comenzando una época gris para las Ciencias en general, y en la que, particularmente, la Geometría vivió un largo y

profundo letargo de casi mil años de duración. Sin embargo, durante dicho milenio, aparecieron esporádicamente figuras como San Isidoro de Sevilla (560-636), en cuya enciclopedia hay una parte dedicada a la Geometría, limitada únicamente a definiciones de las figuras planas y espaciales, y, en la Marca Hispánica, el monje Gerberto (941-1.003), posteriormente Papa Silvestre II, que escribió un tratado de Geometría, en el cual se resuelve el problema de obtener los catetos de un triángulo rectángulo a partir de su área y de la hipotenusa.

Durante el siglo IX, se puede hablar de la existencia de una Escuela de Bagdag que cultivó la Geometría, entre cuyos representantes están:

- Joarizmi (830) y Tabit (835-901) que resolvieron geométricamente las ecuaciones de segundo y tercer grado respectivamente.

- Albateni, muerto en Bagdag hacia el año 929 y apodado el Ptolomeo árabe, que dio a la Trigonometría la forma simplificada actual.

- Abulguafa (933-998), que cultivó la Geometría de la regla y el compás.

- Alhazen (987-1.038), que determinó el volumen engendrado por la rotación de una parábola alrededor de su eje, y resolvió el problema de hallar el punto de un espejo cóncavo donde debe incidir un rayo luminoso para que el reflejado pase por un punto dado.

Hacia el año 1.085, el judío catalán Svasorda escribió el "Libro del Tratado de la Medida y del Cálculo", excelente recopilación de Geometría euclídea, que plagió el italiano Fibonacci (1.175-1.250), incluidos los ejemplos numéricos.

También italiano. Campano de Novara, en el siglo XIII, comentó y amplió la traducción latina que la Escuela de Traductores de Toledo había hecho de los "Elementos" de Euclides.

Hacia el año 1.236, el alemán Jordano Nemorario inició una teoría sobre polígonos estrellados, completada por el inglés Tomás de Bradwardino (1.290-1.349).

Otros personajes dignos de mención, por sus aportaciones a la Geometría durante las últimas centurias de la Edad Media, son:

- Nicolás Oresme (1.323-1.382), francés, que dio los primeros pasos en la representación gráfica de funciones".

- Nicolás de Cusa (1.401-1.464), que creó un elegante método para rectificar un arco de circunferencia.

- Johann Müiier, apodado Regiomontano (1.436-1.476), alemán, que tradujo y comentó las "Cónicas" de Apolonio.

- Lucas Paciol¡(1.445-1.514), que escribió una enciclopedia matemática muy difundida gracias a la imprenta inventada por Gutemberg.

En séptimo lugar, el Renacimiento de la Geometría. A finales del siglo XV y principios del XVI tuvo lugar el movimiento que se conoce como Renacimiento, que intentó resucitar en la cultura europea los valores formales y espirituales de la antigüedad. Gracias a la posibilidad de leer las traducciones de las obras de Euclides, Arquímedes y Apolonio, durante este movimiento, se despertó una nueva curiosidad por la Geometría, la cual adquirió, después del lento proceso de una etapa de asimilación, el carácter abstracto y general aportado por sus estudiosos, fundamentalmente matemáticos, cuya atención se dirigía especialmente al Álgebra. Entre ellos destacaron:

- Alberto Durero (1.471-1.525), alemán, que en su obra "Instituciones Geométricas" dio normas para construir y representar poliedros regulares y semirregulares, así como su desarrollo sobre un plano, y análogamente para la hélice y otras curvas alabeadas.

- Pedro Nuñez (1.502-1.578), que encontró la curva loxodrómica, demostrando que no es un círculo máximo sino una espiral esférica con el polo como punto asintótico.

- Francisco Viete (1.540-1.631), francés, que fue el primer introductor del Álgebra en la Geometría, construyendo gráficamente las ecuaciones de segundo y tercer grado. Viete restituyó el tratado perdido de Apolonio "De Tactionibus", relativo a las tangencias, resolviendo de una forma simple y elegante el problema de hallar la circunferencia tangente a otras tres dadas. En Trigonometría aportó la teoría del triángulo recíproco para transformar un triángulo esférico en otro cuyos lados y ángulos se corresponden con los del primitivo.

- Johann Kepler (1.571-1.630), alemán, que introdujo el uso del infinito en la Geometría^^, así como algunas teorías sobre polígonos estrellados. Generalizó los trabajos realizados por Arquímedes sobre los volúmenes de los esferoides y de los conoides. En 1.609 escribió "Astronomía Nova", donde enunció las leyes que llevan su nombre sobre las órbitas planetarias y un método gráfico proyectivo para determinar las circunstancias de los eclipses de Sol en diferentes lugares de la Tierra.

- Paul Guldin (1.577-1.643), suizo, que a partir de las teorías de Pappus, en su obra "Centrobaryca" enunció el teorema que lleva su nombre sobre el volumen engendrado por una superficie plana que gira alrededor de un eje que no la corta.

- Gregorio de San Vicente (1.584-1.667), belga, que escribió su obra sobre la cuadratura del círculo y de las secciones cónicas, en la que descubrió, también a través del método de la exhaustión, que dicha cuadratura estaba relacionada con los logaritmos.

- Girard Desargues (1.593-1.663), francés, arquitecto e ingeniero militar, que escribió la obra "Borrador de un ensayo que trata de los resultados de los encuentros de un cono con un plano", cuya idea central se deriva de la perspectiva del arte pictórico renacentista. En ella, introduciendo el concepto de rectas paralelas que se cortan en un punto del infinito y suponiendo, como Kepler, que la parábola tiene un foco en el infinito, estudió las cónicas por métodos proyectivos, demostrando que dichas curvas forman una familia con propiedades comunes. Se le considera como el precursor de la Geometría Proyectiva, entre cuyas aportaciones están: las propiedades involutivas del cuadrilátero inscrito en una cónica y la propiedad fundamental de los triángulos homológicos en el espacio. También escribió sobre la estereotomía de las piedras, la gnomónica y la perspectiva en genera.

- Bonaventura Cavalieri (1.598-1.647), italiano, discípulo de Galileo, que escribió la obra "Geometría de los indivisibles", en la que calculó las magnitudes geométricas, áreas y volúmenes, como suma de sus elementos geométricos indivisibles, método que, basado en el de exhaustión de Arquímedes, sustituyó durante casi medio siglo al cálculo integral, contribuyendo significativamente a la resolución del problema de las cuadraturas de las curvas. Es notable su idea para transformar los puntos de la parábola de Apolonio en puntos de la espiral de Arquímedes.

- Gilíes Personne de Roberval (1.602-1.675), francés, que resolvió el problema de la tangente a una curva con un enfoque cinemático, considerando a la curva como la trayectoria de un punto y a la tangente como la dirección del movimiento de dicho punto. Aplicando estas consideraciones a la cicloide, a la que él llamaba trocoide, descubrió un método para trazar la tangente en uno de sus puntos, demostró que el área encerrada bajo un arco de cicloide es igual a tres veces el área del círculo que la genera, y obtuvo el volumen del cuerpo engendrado al girar dicha área alrededor de su recta base, de su eje de simetría o de la tangente en su vértice.

- Pierre de Fermat (1.601-1.665), francés, de quien se han perdido gran número de sus trabajos, ya que rara vez publicaba sus descubrimientos, e incluso olvidaba anotar las demostraciones matemáticas que hacía. Completó la labor de Arquímedes cuadrando las parábolas de todo orden, determinando los volúmenes y centros de gravedad de los paraboloides, y además rectificando la parábola cúbica por un método exclusivamente geométrico, análogo al de exhausto; aunque también dominaba los procedimientos propios de la Geometría Analítica, que utilizó para obtener lugares planos y sólidos, como se ve en su obra "Isagoge ad locos planos et sólidos". Resolvió el problema del trazado de tangentes a una curva considerando a dicha tangente como la posición límite de una secante cuando los puntos de corte tienden a confundirse. Compartió con Pascal el honor de crear el cálculo de probabilidades. Aplicó su teoría de máximos y mínimos al fenómeno de la refracción de la luz, dando lugar a su famoso principio de la óptica geométrica, en cuyo campo también compartió honores con Descartes.

III. LAS NUEVAS GEOMETRÍAS

a. Geometría Analítica

[14] manifiestan que la Geometría Analítica es una rama de la geometría que posee una importancia suprema en la evolución de la sociedad desde hace más de dos mil años y que también se puede trabajar con profundidad en la enseñanza media. El saber su historia, permite conocer y comprender su evolución, sus aportes y las consecuencias que esta rama trajo y trae consigo hasta hoy en día. A continuación se abordarán aspectos como los antecedentes históricos, también personajes que son reconocidos como los precursores de la Geometría Analítica, además de contenidos de la mismadisciplina.

[10] detalla que con el francés Rene Descartes (1.596-1.650) nació una nueva Geometría: la Geometría Analítica, que unió íntimamente el Álgebra y la Geometría hasta entonces conocidas, y sirvió para aplicar los métodos anteriores de una forma uniforme y general, al mismo tiempo que abrió el camino para la posterior creación del Cálculo Infinitesimal.

Descartes, escribió su obra "Geometría" más como filósofo que como matemático, ya que su finalidad era presentarla como una muestra de la validez de su teoría filosófica, según la cual la Matemática no es un fin sino un método. De hecho, publicó dicha obra, compuesta por tres libros, dos de Geometría y uno de Álgebra, como un apéndice de su "Discurso del Método". Estas teorías fueron acogidas por los geómetras con gran entusiasmo, ya que con ellas se les ofrecía un camino fácil y llano para resolver los problemas mediante un automatismo algebraico, sin necesidad del concurso de la inspiración y del ingenio que exigía el abierto por Euclídes, Arquímedes o Apolonio. Todo ello trajo consigo un rápido progreso de la Geometría Analítica pero supuso, sin embargo, un golpe funesto para la Geometría pura.

Entre las muchas aportaciones de Descartes al estudio de las curvas está la de clasificarlas en geométricas, tales como la concoide y la cisoide, y mecánicas, como la espiral y la cicloide; así como, al igual que Fermat, la de resolver el problema de la tangente, considerándola como posición límite de una secante. También es de destacar sus trabajos en óptica, donde enunció las leyes que llevan su nombre sobre la reflexión y refracción de la luz.

El francés Blas Pascal (1.623-1.663), encauzado por su padre Etienne Pascal, también matemático, hacia el mundo de las letras, destacó como geómetra por encima de todos sus antecesores. A los doce años se inició de forma autodidacta en los conocimientos de la Geometría, y a los catorce acompañaba a su padre a las reuniones de los geómetras del Padre Mersenne en París. A los dieciséis años escribió su "Ensayo sobre las cónicas", que constaba de una sola página, aunque fue ampliado posteriormente, y en el que aparece la propiedad del hexagrama místico, enunciado más tarde como teorema del hexágono inscrito en una cónica, sin hacer alusión en él a longitudes de segmentos ni a valores angulares, por lo que se le considera como el iniciador de la Geometría moderna.

Pascal se ocupó también de las áreas, volúmenes y centros de gravedad de algunos cuerpos, así como de las propiedades de algunas curvas, especialmente de la cicloide; a la que Galileo bautizó como la "Elena de la Geometría" por su graciosa belleza, aconsejando incluso que se diera su forma a los arcos de los puentes, lo cual se hizo durante algún tiempo.

Destacan también sus trabajos sobre los indivisibles y sobre el cálculo de probabilidades, así como los de hidrostática, enunciando el principio que lleva su nombre. Sus inquietudes religiosas le condujeron a verse envuelto en las disputas que existían, no solo en el terreno teológico sino también en el geométrico, entre jansenistas y jesuítas. Los primeros, seguidores del teólogo holandés Cornelio Jansen (1.585-1.638), pretendían reformar los "Elementos" de Euclides de acuerdo con las normas del nuevo arte de pensar de la época, exigiendo las demostraciones directas y rechazando el razonamiento por reducción al absurdo, en contra de los jesuítas, seguidores de San Ignacio de Loyola, que monopolizaban la enseñanza en Francia y seguían fielmente ai geómetra alejandrino.

Entre los jansenistas destacaron Antonio Arnauid (1.602-1.694), autor de "Nuevos Elementos de Geometría", y Francisco Nicole (1.625-1.695); mientras que por los jesuítas lo hicieron Gasten Pardies (1.636-1.673), autor de "Elementos de Geometría", en los que intentó demostrar la existencia de Dios por consideraciones sobre espacios asintóticos; y el abate De la Chapelle (1.710-1.792), autor de "Instituciones de Geometría", obra en la que defiende el razonamiento por reducción al absurdo. Estas luchas entre sectas religiosas sirvieron para depurar algunos conceptos geométricos despojándolos de una buena parte de su ganga intuitiva.

La Geometría Analítica de Descartes fue dada a conocer en Inglaterra por John Wallis (1.616-1.703) con su obra "Tractatus de sectionibus conicis", y en Holanda por Franz van Schooten (1.615-1.661) con su "Comentar!" a la "Geometría" de Descartes, siendo éste quien primero extendió el método cartesiano al espacio, y restituyó los lugares planos de Apolonio en sus "Exercitaciones Geometriae". También en Holanda destacaron: Johan de Witt (1.625-1.672), que escribió el primer tratado sistemático de Geometría Analítica titulado "Elementa curvarum linearum", y el canónigo Rene de Sluse (1.622-1.658), que perfeccionó la construcción de las soluciones de una ecuación por intersección de curvas.

Aunque la invención del Cálculo Infinitesimal por Newton y Leibnitz hizo ocupar a la Geometría un puesto subalterno respecto al Análisis, no faltaron geómetras que siguieron fieles a la tradición griega, tales como:

- Christian Huygens (1.629-1.695), holandés, autor del libro "Horologium oscillatorium" en el que se recogen sus trabajos sobre la cicloide, la teoría de las evolventes y evolutas, y las leyes de la fuerza centrífuga, que sirvieron de introducción a los "Principios" de Newton. En su "Tratado de la luz" estudió la teoría de las ondas y enunció el famoso principio de Óptica que lleva su nombre.

- Felipe de la HIre (1.640-1.718), francés, discípulo de Desargues y arquitecto, escribió "Nuevos elementos de las secciones cónicas", en el que expuso las propiedades métricas de las cónicas a partir de las del círculo. Posteriormente publicó el "Tratado de las secciones cónicas", donde, desde un punto de vista proyectivo, estudió temas conocidos como: las propiedades armónicas del cuadrilátero completo, los polos y polares, las tangentes y normales, y los diámetros conjugados. También merecen destacarse sus trabajos sobre la cicloide y epicicloide, así como su "Tratado de Gnomónica".

- Isaac Newton (1.642-1.727), inglés, dedicó dos capítulos de su obra "Principia" a las secciones cónicas, que generó orgánicamente mediante intersecciones de rectas móviles, y relacionó con el cuadrilátero completo También dedicó su obra "Enumeratio linearum tertii ordinis", apéndice de su "Óptica", al estudio de la representación gráfica de curvas planas, dibujando y catalogando setenta y dos tipos de cúbicas.

Durante el siglo XVIII la Geometría pura clásica cayó en desuso, sin embargo, hubo matemáticos entre los seguidores de Newton, grupo insular. y entre los seguidores de Leibnitz, grupo continental, que merecen ser citados como geómetras. Entre los insulares destacaron:

- Edmundo Halley (1.656-1.742), que restituyó el libro VIII de las "Cónicas" de Apolonio.

- David Gregory (1.661-1.751), que escribió el libro "Exercitatio Geométrica" siguiendo los métodos clásicos.

- Abraham Moivre (1.667-1.751), hugonote francés, que escribió "Miscellanea analytica" en la que, además de la teoría de las probabilidades, hace un desarrollo analítico de la trigonometría.

- Roger Cotes (1.682-1.716), cuyos trabajos, publicados después de su muerte bajo el título de "Harmonía mensurarum", se pueden considerar como el primer intento de una teoría general de curvas.

- Colin Maclaurin (1.698-1.746), que en su obra "Geométrica orgánica" completó las ideas de Newton sobre la generación orgánica de las cónicas y extendió a las cúbicas las propiedades del cuadrilátero inscrito, deducidas para las cónicas.

- Tomas Simpson (1.710-1.748), a quien se debe la fórmula para calcular las áreas limitadas por una curva cualquiera, un eje y dos ordenadas extremas.

Entre los geómetras continentales se distinguieron:

- Giovanni Ceva (1.647-1.734); italiano, notable por el descubrimiento de importantes teoremas sobre la teoría de las transversales.

- Santiago Bemouilli (1.654-1.705), suizo, perteneciente a una vasta familia de matemáticos. IVIuy interesado en el estudio de curvas, demostró que la parábola semicúbica era una curva isócrona^^, que la cicloide era una curva braquistócrona^^; descubrió la lemniscata que lleva su nombre y varias propiedades, desconocidas hasta entonces, de la espiral logarítmica.

- Leonhard Euler (1.707-1.783), también suizo, discípulo de la familia Bernouilli, fue profesor de Matemáticas en la Academia de San Petesburgo y en la de Berlín. Aunque su figura está más íntimamente ligada al cálculo diferencial, es de destacar su labor como geómetra, dando fórmulas para la transformación de coordenadas en el espacio, estudiando la curvatura de las superficies, demostrando propiedades y relaciones entre los puntos notables de un triángulo (recta de Euler y círculo de los nueve puntos), enunciando teoremas sobre los poliedros, e iniciando la Geometría Infinitesimal.

- Juan Lambert (1.728-1.777), francés, que escribió "Insigniores orbitae cometarum propietates", donde figura el teorema que lleva su nombre sobre las cónicas; además, demostró la inconmensurabilidad del número n y desarrolló la trigonometría esférica.

- Lorenzo Mascheroni (1.750-1.800), italiano, que escribió una notable "Geometría del compás" en la que resuelve solamente por medio de este instrumento construcciones geométricas en las que normalmente se necesita también la regla.

b. Geometría Descriptiva.

[15]En el siglo XVIII al aplicar las teorías matemáticas a la práctica, proceso que culminó en 1795 con la obra de Gaspar Monge (1746-1818) “Geometría Descriptiva” la gramática del lenguaje gráfica, se le dio a la geometría descriptiva el carácter científico con su base geométrica. A finales del siglo XVIII, siendo Profesor de la Escuela Tecnológica de Francia, desarrollo los principios de las proyecciones que constituyen la base deldibujo técnico de hoy en día. Al reconocer que estos principios de la geometría descriptiva tenían gran importancia militar se le obligó a Monge a mantenerlos en secreto hasta 1795. Los principios de Monge llegaron a los Estados Unidos en 1816 a través del Sr. Claude Crozet, Profesor de la Academia Militar de West Point. El Profesor Crozet público en 1821 el primer texto en inglés sobre geometría descriptiva. En los años siguientes se convirtieron estos principios en parte regular del plan de estudios de los primeros años de ingeniería en el Instituto Politécnico Rensselaer, en la Universidad de Harvard, en la Universidad de Yale y en otras, convirtiéndose de esta forma hoy en día, la geometría descriptiva, en materia de estudio en los primeros años de las carreras de ingeniería y arquitectura en la gran mayoría de las universidades del mundo (p. 6-7).

[10] destaca que el final del siglo XVIII y el comienzo del XIX representó un cambio profundo en la estructura social, política, económica y cultural del mundo occidental, cambio que afectó afortunadamente también a la Geometría pura, la cual por aquel entonces presentaba un pasado grandioso, un presente triste y un porvenir incierto. Se puede hablar, pues, que el cambio de siglo trajo consigo una auténtica revolución geométrica, en la cual destacó como figura señera el francés Gaspar Monge (1.746-1.818), creador de una nueva Geometría, conocida hoy con el nombre de Geometría Descriptiva.

Monge, personaje de peso en la política francesa de su época, fundó la Escuela Politécnica de París, de la que fue, con gran éxito, administrador y profesor. Una de las dos materias que impartía se conocía entonces con el nombre de "Estereotomía", cuyo denso programa abarcaba el estudio de sombras, perspectiva, topografía, propiedades de las superficies, incluidas normales y planos tangentes, y teoría de las máquinas. Para la exposición y desarrollo de estos temas ideó un procedimiento, conocido hoy como Sistema Diédrico, con el cual cubría un doble objetivo: dar un método para representar en dos dimensiones cuerpos de tres, y proporcionar un medio de reconocer la forma de los cuerpos mediante una descripción exacta de sus elementos constituyentes y de sus posiciones respectivas. Este procedimiento de rango científico, pero cuyo fin era exclusivamente práctico, únicamente fue dado a conocer por Monge en sus clases, hasta que en el año 1.798 se publicó bajo el nombre de "Tratado de Geometría Descriptiva".

Entre los seguidores de Monge, que contribuyeron al enriquecimiento de esta nueva Geometría, merecen ser destacados: Francisco Lacroíx (1.765-1.843), que escribió "Essai de Geometrie sur les plans et les surfaces", compendio de reglas para construir figuras de dos dimensiones, y aplicó la Geometría Descriptiva a la construcción de relojes de sol; Carlos Dupin (1.784-1.873), ingeniero y profesor de Geometría en París, que fue autor de las teorías de las tangentes conjugadas, de las líneas asintóticas, y de la indicatriz de curvatura de superficies, dando el nombre de "cíclido de Dupin" a la que tiene sus líneas de curvatura todas circulares; Hachette (1.769-1.834), profesor de la Escuela Politécnica de París, que en sus "Elements de Geometrie a trois dimensions" estudió las superficies de segundo orden y la generación rectilínea del hiperboloide de una hoja, y en su "Tratado de Geometría Descriptiva" dio las aplicaciones de esta ciencia a la perspectiva y la estereotomía. Y, por último, Olivier (1.793-1.853), discípulo del anterior, que demostró que la superficie del tornillo de filete triangular es la única superficie alabeada, que en cada punto tiene los dos radios de curvatura principales iguales y de sentido contrario. Al enriquecimiento de esta nueva Geometría también contribuyó el alemán Schlomilch (1.823-1.901), que estudió especialmente las secciones planas de las cuádricas; así como Weisbach (1.806-1.871), Stella (1.827-1.884) y Pohike (1.810-1.876).

Mención especial merece el español Eduardo Torroja (1.847-1.918), cuyos trabajos ayudaron al nacimiento de una nueva rama de la Geometría Descriptiva: la Axonometría.

c. Geometría Proyectiva.

[16] señala que la Geometría Proyectiva tiene sus orígenes en la pintura del Renacimiento. Luego, en el siglo XVII se recuperarán ideas de los matemáticos griegos (las secciones cónicas, por ejemplo), pero son sin duda los pintores renacentistas los que fundamentan esta rama de las Matemáticas al conseguir plasmar en lienzos planos los objetos y las figuras tridimensionales tal como son, a diferencia de sus antecesores de la Edad Media. Por eso no es extraño que en esta exposición aparezcan nombres como Leonardo da Vinci, Rafael Sanzio o Alberto Durero. En el Renacimiento se investiga la visión que nuestro ojo tiene de una figura cuando la vemos en distintas pantallas colocadas entre ella y nosotros. Así nacen la perspectiva y el estudio de lasproyeccionesy lassecciones. Son significativas las preguntas de Leone Battista Alberti en 1435: ¿Qué relación hay entre dos secciones de la misma figura?, ¿cuáles son las propiedades comunes a dos secciones cualesquiera?

Igualmente, [10] manifiesta que casi paralelamente a la Geometría Descriptiva nació otra nueva Geometría: la Geometría Proyectiva, cuyo precursor fue Lázaro Carnot (1.753-1.823), que contribuyó junto con Monge, aunque por un camino distinto, a despertar la afición por la Geometría. En su opúsculo "De la correlation desfigures en Geometrie", editado posteriormente como "Geometrie de la position", introdujo los conceptos de correspondencia directa e inversa, que utilizó para, mediante una única demostración, generalizar las propiedades geométricas de las figuras, independizándolas de las posiciones relativas de sus elementos constituyentes.

La Geometría Proyectiva, llamada primeramente moderna y luego superior, contó en Francia con no pocos seguidores, tales como:

- José-Díaz Gergonne (1.771-1.859), alumno de Monge y fundador de la revista "Annales de Mathématiques Purés y Appliqués", donde publicó sus trabajos sobre la aplicación del principio de dualidad a los teoremas existentes de la Geometría clásica sobre el punto y la recta. Ideó un procedimiento basado en la teoría de la polaridad para la resolución del problema de Apolonio, relativo a la circunferencia tangente a otras tres.

- Carlos Julio Brlanchon (1.785-1.864), también alumno de Monge,demostró el teorema de Pascal respecto a los lados del hexágono Inscrito en una cónica y enunció el que lleva su nombre respecto a los vértices, dual del anterior. Son de destacar sus trabajos sobre el teorema de la circunferencia de los nueve puntos, estudiada anteriormente por Euler y posteriormente por Feuerbach, nombre por el que también se conoce a dicha circunferencia.

- Víctor Poncelet (1.788-1.867), considerado con toda justicia como el verdadero fundador de la Geometría Proyectiva, escribió, partiendo de los trabajos de Desargues, su "Theorie des figures homologiques". En su "Traite des proprietés projectives des figures", redactado en las cárceles rusas, definió los conceptos de figura proyectiva, de propiedad proyectiva y de operaciones proyectivas (proyectar y seccionar), que utilizó para generalizar el estudio de las cónicas y de las cuádricas, a las que consideró como figuras homológicas, relacionadas entre sí mediante operaciones proyectivas. En su obra "Applications d' Algebre et de Geometrie" aplicó el principio de continuidad para demostrar el teorema de Monge relativo a la cuádrica circunscrita a una esfera. Fue el primero que enuncio el principio de la dualidad y el primero que admitió los elementos imaginaros en Geometría.

- Miguel Chasles (1.793-1.880), fundador de la cátedra de Geometría Superior en la Facultad de Ciencias de París, escribió el "Traite de Geometrie Superieure", en el que demostró varios teoremas de la Geometría clásica apoyándose en la razón doble, a la que él llamaba "anharmonique"^\ e hizo un estudio en profundidad de las teorías de la involución y de las transversales.

También en Alemania, casi al mismo tiempo que en Francia, hubo geómetras que contribuyeron al progreso y enriquecimiento de la Geometría Proyectiva, entre los que destacaron:

- Jacobo Steiner (1.790-1.863), catedrático en Berlín, aunque de origen suizo, fue llamado el Apolonlo de la Geometría moderna por llevar a cabo su estudio sin ayuda del análisis. Al mismo tiempo que Poncelet demostró que todas las construcciones euclídeas se pueden realizar solo con la ayuda de una regla y una única circunferencia fija. Se le considera como el descubridor de la teoría de la inversión, si bien no llegó a publicarla.

- A. F. Mobius (1.790-1.868), que escribió "Baryscentrische caicul", en la cual expuso sus trabajos sobre las coordenadas homogéneas. Inventó la superficie de una sola cara que se conoce como "banda de Mobius".

- Carlos Wilhelm Feuerbach (1.800-1.834), a quien se le puedeconsiderar como uno de los inventores del sistema de coordenadas homogéneas. También destacó por sus trabajos sobre la Geometría de lacircunferencia y del triángulo, aportando nuevas propiedades a la circunferencia de los nueve puntos, conocida también como circunferencia de Feuerbach.

- Julius Plücker (1.801-1.868), que empezó estudiando la Geometría dentro del campo sintético para acabar en el analítico. Redescubrió el sistema de coordenadas homogéneas, también llamadas coordenadas pluckerianas, aplicándolas al estudio de la Geometría Proyectiva, con lo cual pudo dar al principio de dualidad una representación analítica, llegando a demostrar que cualquier curva se puede considerar generada de una manera dual: como lugar geométrico de un punto móvil o como envolvente de una recta móvil.

- K. G. C. ven Staudt (1.798-1.1.867), que organizó la Geometría Proyectiva sin recurrir a ninguna noción métrica, como lo refleja su obra "Geometrie der Lage", redactada sin emplear una sola figura, por lo que resulta demasiado abstracta y de difícil comprensión.

- Karl Culmann (1.821-1.881), profesor de la Escuela Politécnica de Zurich, que aplicó la Geometría Proyectiva a la resolución de problemas relativos al movimiento y a las fuerzas, cuyo resultado fue la creación de la Estática Gráfica.

En Inglaterra, Arturo Cayley (1.821-1.895), profesor de la Universidad de Cambrigde, siguió la línea de Plücker para un espacio n-dimensional, en el que desarrolló sus teorías sobre transformaciones lineales y matrices, que aplicó a la Geometría Proyectiva, contribuyendo a su generalización.

En Italia, Luigi Cremona (1.830-1.903), profesor de Geometría en Bolonia, Milán y Roma, profundizó en las teorías de Steiner, generalizando la inversión al espacio tridimensional.

En España, el ya mencionado Eduardo Torroja, que en su "Tratado de Geometría de la posición y sus aplicaciones a la Geometría de la medida" amplió notoriamente los conceptos de Chasles, aunque no siempre los puntos de vista de ambos fueron coincidentes.

d. Geometrías No – Euclídeas

Dentro del notable desarrollo que experimentó la Geometría durante la última mitad del siglo XVIII y primera mitad del siglo XIX, tuvo lugar el nacimiento, casi al mismo tiempo que la Geometría Descriptiva y la Geometría Proyectiva pero independientemente de ellas, de una nueva Geometría: la Geometría no-euclídea. Esta nueva Geometría, de secular gestación, fue el fruto de la serie de trabajos que históricamente se fueron sucediendo con la finalidad de demostrar el quinto postulado de Euclides.

El árbol genealógico de la paternidad de esta Geometría se inicia con los geómetras griegos: Posidonio (135 a. de J.C.-41 a. de J.C.), Gemino (hacia el año 40 a. de J.C), Ptolomeo (87-165) y Proclo (410-485); y continúa, durante el largo letargo de la Geometría, con el geómetra árabe, de origen persa, Nassir-Eddin (1.201-1.274); y ya en el Renacimiento, con los italianos Commandino (1.509-1.575), Cataldi (1.552-1.626) y Borelli (1.608-1.679).

A partir de la segunda mitad del siglo XVIII, se empezó a ver algún progreso con el jesuíta italiano Girolamo Saccheri (1.667-1.733), quien, haciéndose eco de las ideas aportadas por el inglés Wallis a los trabajos de Nassir-Eddin, escribió "Euclides ab omni naevo vlndicatus", obra en la que a partir de un cuadrilátero birrectangular isósceles^^ demostró que los otros dos ángulos son iguales, estableciendo respecto a ellos tres hipótesis: que fueran rectos, con lo cual quedaría demostrado el Postulado; que fueran agudos ("hipótesis del ángulo agudo"); o que fueran obtusos ("hipótesis del ángulo obtuso"). Estas dos últimas hipótesis las negó por reducción al absurdo, sin demostrar al final la validez absoluta del postulado; no obstante obtuvo una serie de conclusiones, que sirvieron para empezar a incubar la nueva Geometría, tales como la de clasificar todas las rectas de un haz respecto a otra recta en dos grupos: las que la cortan y no tiene una perpendicular común con ella, y las que no la cortan, las cuales están separadas de ella por dos rectas asintóticas a la misma.

El suizo Juan Enrique Lambert (1.728-1.777), en su obra "Theorie der parallelinien" siguió los pasos de Saccheri, pero partiendo de un cuadrilátero trirrectángulo^^ aunque llegó a análogos resultados que aquel; sin embargo fue más audaz en sus conclusiones al admitir el desarrollo de una Geometría sobre una esfera de radio imaginario.

El francés Adrián IVIaria Legendre (1.752-1.833), en su libro "Elements de Geometrie"^^ demostró, sin utilizar el postulado, que la suma de los ángulos de un triángulo no puede ser mayor que dos rectos, rechazando la hipótesis de ángulo obtuso, y concluyendo que si dicha suma vale dos rectos en un cierto triángulo también lo valdrá en todos, pero no encontró ese cierto triángulo.

Carlos Federico Gauss (1.777-1.855), aclamado unánimemente como el Príncipe de los Matemáticos, estudió el postulado, llegando a la convicción de la imposibilidad de su demostración y estableció, a partir de una nueva definición de paralelismo, los teoremas fundamentales de lo que llamó Geometría antieuclídea, pero nunca los publicó. Dentro de sus trabajos como geómetra destacan: el procedimiento dado, cuando tenía sólo diecinueve años, para construir un polígono regular de diecisiete lados; así como el estudio que hizo, más en el campo del análisis matemático que en el de la Geometría tradicional, sobre: las propiedades de las superficies y de las curvas en el entorno de un punto, definiendo la curvatura total o curvatura gaussiana a partir de los radios de curvatura principales; y sobre las curvas geodésicas de las superficies, por lo que se le considera como el padre de la Geometría Diferencial.

Fue el ruso Nicolás Ivan Lobatschewski (1.793-1.856), considerado como el Copérnico de la Geometría, quien primero hizo públicos sus trabajos sobre la Geometría no-euclídea bajo los títulos de "Nuevos Fundamentos de la Geometría", "Investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas" y "Pangeometría". Su definición de paralelismo contradijo frontalmente a la de Euclides, al tiempo que sirvió para consolidar las ideas de Saccheri y aclarar la hipótesis del ángulo agudo formulada por éste.

Esta Geometría no-euclídea, a la que el propio Lobatschewski denominó inicialmente como Geometría imaginaria y más tarde pangeometría, se apoya en un conjunto de teoremas, algunos de ellos independientes del famoso postulado y otros que se basan en su nueva definición de paralelismo, pero válidos todos ellos también en la Geometría de Euclides, por lo que ésta queda así incluida en la de Lobatschewski. En ella, las figuras fundamentales son el oriciclo o círculo de radio infinito, equivalente a la recta de Euclides y la orisfera o esfera de radio infinito, equivalente al plano de Euclides; las rectas paralelas no se cortan, pero su separación disnninuye al prolongarlas, y la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos, siendo menor dicha suma cuanto mayor es el triángulo.

Contemporáneo de Lobatschewski fue el húngaro Janos Boiyai (1.802-1.860), oficial del ejército e hijo de matemático, que escribió "Ciencia absoluta del espacio", obra en la que desarrolló también la Geometría noeuclídea, llegando a los mismos resultados que el ruso, pero siguiendo procedimientos distintos y menos analíticos que los de aquel.

El alemán Bernardo Riemann (1.826-1.866), discípulo de Gauss y Steiner, contribuyó a completar la tarea iniciada por Saccheri, Lobatschewski y Boiyai. En su tesis doctoral "Sobre los fundamentos que sirven de base a la Geometría", se advierte como sus ideas respecto a la Geometría no-euclídea tiene un carácter más general que las de los anteriores; enfocando su estudio como el de las variedades de cualquier número de dimensiones en cualquier tipo de espacio. Al extender al espacio el concepto de curvatura de su maestro Gauss, consideró que en cualquier superficie curva sus líneas geodésicas desempeñan análogo papel al de las rectas euclídeas en el plano.

En la Geometría de la esfera, ampliada al espacio, se tiene un modelode la Geometría riemanniana, y en ella se demuestra como dos geodésicas se cortan siempre en dos puntos, y como la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos, siendo mayor dicha suma cuanto mayor es el área del mismo, con lo que queda asentada también la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri.

El italiano Eugenio Beltrami (1.835-1.900), compañero de Cremona, demostró la existencia de un modelo de la Geometría de Lobatschewski con su pseudoesfera, superficie de curvatura negativa engendrada por la rotación de una tractriz alrededor de la recta de centros de la familia de circunferencias ortogonales a ella.

Las Geometrías no-euclídeas de Lobatschewski y Riemann no sólo supusieron una ruptura con un pasado geométrico de veintidós siglos, destruyendo la concepción kantiana^ del espacio y poniendo en duda por primera vez la coincidencia de la Geometría con la realidad, sino que además han sido instrumentos científicos de alto valor que han contribuido al avance de la Física teórica en diversos campos como el del átomo y el de las estrellas, e incluso en el descubrimiento de la teoría de la relatividad.

La Geometría no-euclídea, como rama de la Geometría, también es ciencia que estudia el espacio exterior al individuo; aunque en dicho estudio sigue un proceso distinto al de la Geometría euclídea. Así, mientras que ésta lo hace a partir de la observación de un espacio físico, y a través de la abstracción sistemática de las propiedades físicas de los cuerpos crea un espacio intuitivo que identifica con el de partida, la Geometría no-euclídea separa el espacio físico del intuitivo, creando en su lugar un espacio abstracto que, independizándolo de toda observación sensorial, lo fundamenta sobre una base lógica, mediante procesos racionales aplicados a los principios más sencillos posibles.

Siendo Lobachevski (1793-1856) y Riemann (1826-1866) los exponentes más destacados de estas nuevas formas. Sánchez (1983, p. 11). La geometría no euclidiana o no euclídea, es denominada a cualquier forma de geometría cuyos postulados y propiedades difieren en algún punto de los establecidos por Euclides en su tratado los Elementos. Nikolai Lobachevski desarrolló una importantísima labor académica que cristalizó en 1829 con la publicación de una geometría particular, la denominada hiperbólica, que no respetaba el postulado de las paralelas de Euclides, pero que aun así era lógicamente correcta.

Es decir, que durante el transcurso de dos milenios los “Elementos” de Euclides gozaron de autoridad innegable en el mundo científico. Sin embargo, un pasaje de este trabajo parecía no estar suficientemente justificado. Se sobreentiende el axioma del paralelismo, que Euclides formuló así:

Durante el transcurso de dos milenios los " Elementos" de Euclides gozaron de autoridad innegable en el mundo científico. Sin embargo, un pasaje de este trabajo parecía no estar suficientemente justificado. Se sobreentiende el axioma del paralelismo, que Euclides formuló así:

Si dos líneas rectas, al intersecarse con una tercera, forman ángulos internos unilaterales cuya suma es inferior a dos ángulos rectos, resulta ser que estas dos rectas, al prolongarlas ilimitadamente, se encontrarán por aquel lado en el que esta suma es inferior a dos ángulos rectos [17].

[17], disertado de aquí en adelante, hasta culminar el primer capítulo, manifiesta que la justeza del axioma del paralelismo de Euclides no suscitaba dudas. La duda respecto a este axioma radicaba en otra cosa: ¿era justo el haberlo relacionado a la categoría de los axiomas?, ¿no sería posible demostrar este axioma con ayuda de otros axiomas de los " Elementos” euclidianos y, de esta manera, pasarlo a la categoría de los teoremas?

Al principio, los intentos de demostrar el axioma del paralelismo reflejaban la tendencia señalada anteriormente de disminuir el número de proposiciones geométricas, que exigían fundamentación empírica. Con el transcurso del tiempo la situación varió: se olvidó el origen experimental de los axiomas y éstos se comenzaron a interpretar como verdades evidentes de por sí, independientemente de cualquiera que fuera el experimento. Semejante punto de vista engendró la seguridad que el axioma del paralelismo, que por su complejidad es difícil admitirlo como axiomático, en realidad no es un axioma y por consiguiente, se puede hallar la demostración de la afirmación contenida en él. Sin embargo, los numerosos esfuerzos en este sentido no dieron resultados positivos y el axioma del paralelismo, cual tesoro hechizado, no descubría sus secretos a los investigadores. Los intentos de demostrar este axioma, condenados al fracaso, exigieron un consumo enorme de trabajo intelectual de numerosas generaciones de sabios y fueron la expiación por la interpretación idealista de la esencia de los axiomas.

En sus investigaciones de la teoría de las líneas paralelas, Lobachevski fue por otro camino. Habiendo comenzado por intentos de demostrar el axioma del paralelismo pronto advirtió que uno de ellos conduce a resultados absolutamente inesperados. Este intento consistía en la utilización del método de demostración por oposición y se basaba en la consideración siguiente: si el axioma del paralelismo de Euclides es resultado de otros axiomas de los "Elementos" y si, no obstante, se admite que a través de un punto fuera de una recta, en el plano determinado por éstos, se pueden trazar por lo menos dos rectas que no cortan a la recta dada, resultará ser que esta suposición tarde o temprano, en sus resultados más inmediatos o más lejanos, conducirá a una contradicción.

Entre tanto, analizando los nuevos resultados de la admisión hecha por él, paradójicos desde el punto de vista de la geometría euclidiana, Lobachevski se persuadía que éstos formaban un sistema lógico no contradictorio de teoremas capaces de constituir la base de una nueva teoría científica.

Así fue fundamentada la geometría no euclidiana; su axioma del paralelismo se diferencia del euclidiano y coincide con la suposición citada anteriormente, que en lo sucesivo denominaremos axioma del paralelismo de Lobachevski.

No obstante, no quedaba claro si se podía afirmar con seguridad que ninguno de los numerosos posibles resultados del axioma del paralelismo de Lobachevski conduciría a una contradicción. Lobachevski fijó la solución de esta cuestión: señaló que la no contrariedad de la geometría descubierta por él debe deducirse de la posibilidad de aritmetizarla, es decir, de la posibilidad de reducir la solución de cualquier problema geométrico a cálculos aritméticos y transformaciones analíticas, utilizando para ello las fórmulas de la trigonometría hiperbólica deducidas por él mismo. Ulteriormente fueron halladas por otros sabios demostraciones rigurosas de la no contrariedad de la geometría de Lobachevski.

Las investigaciones de Lobachevski en la rama de la geometría hiperbólica son muy vastas: abarcan su parte elemental, la trigonometría, la geometría analítica y la geometría diferencial. Utilizando los métodos de la geometría creada por él, Lobachevski halló más de 200 fórmulas nuevas para el cálculo de las integrales definidas.

El descubrimiento de Lobachevski se calificaba por sus contemporáneos, e incluso por sus discípulos, como un disparate monstruoso, como un desafío audaz a las leyes de la lógica y del sentido común. No nos asombra tal actitud respecto a la idea genial que demolía las nociones de aquella época. Con la mina hostilidad también había sido acogida la teoría heliocéntrica de Copérnico, que negaba aquello que parecía ser absolutamente evidente y afirmaba aquello que parecía ser inconcebible. Se requerían consideraciones muy profundas para comprender la admisibilidad de dos geometrías diferentes.

Como resultado de las investigaciones de Lobachevski se puso en claro que no sólo son concebibles las superficies con propiedades no euclidianas, sino que también lo son los espacios no euclidianos tridimensionales.

Ahora se puede responder a una pregunta que con frecuencia oímos: ¿cuál de las dos geometrías es la verdadera, la de Euclides o la de Lobachevski?

Semejante pregunta no surge respecto a las geometrías bidimensionales euclidiana y esférica, es absolutamente obvio que ambas son verdaderas, pero cada una de ellas tiene su campo de aplicación: no pueden ser usadas las fórmulas de la geometría esférica para las figuras planas, así como no pueden ser usadas las fórmulas de la geometría bidimensional euclidiana para las figuras en la esfera. Esto mismo es también justo respecto a las diversas geometrías tridimensionales cada una de ellas, siendo lógicamente no contradictoria, encuentra empleo en una rama determinada, no siendo obligatorio que ésta sea geométrica; no obstante, cada una de ellas se negará a servir si a sus principios se les atribuye un carácter universal.

Por el hecho que en la teoría de la relatividad se utilizan fórmulas de la geometría no euclidiana no se deduce todavía la necesidad de entregar la geometría de Euclides al archivo, tal y como ocurrió con la astrología, la alquimia y otras seudo ciencias semejantes. Tanto una como otra geometría representan un instrumento para el estudio de las formas espaciales, pero la primera permite efectuar investigaciones más detalladas, mientras que la segunda es suficiente para la solución de la inmensa mayoría de problemas prácticamente importantes de muy elevado grado de exactitud y como, además, se distingue por ser muy simple, siempre le estará asegurada una amplia aplicación.

Para terminar, se señalará aquello nuevo que aportó Lobachevski en el desarrollo de las ideas geométricas. Los méritos científicos de este notable pensador no se agotan con el hecho de que haya arrancado el velo del misterio milenario del axioma del paralelismo; la importancia de sus investigaciones es inmensurablemente más amplia.

Habiendo sometido a un análisis crítico uno de los axiomas euclidianos, Lobachevski dio comienzo a la revisión de algunas posiciones iniciales del sistema de Euclides, hecho que posteriormente condujo a la elaboración de principios rigurosamente científicos de construcción axiomática de la geometría y de otras ciencias matemáticas.

El descubrimiento por Lobachevski de la geometría hiperbólica sacó a la ciencia concerniente a las formas espaciales de los estrechos límites del sistema euclidiana La geometría de Lobachevski encontró aplicación directa en la teoría de integrales definidas y en otras ramas de la matemática.

Lobachevski suscitó la elaboración de cuestiones que no podían surgir con el estado precedente de la matemática y, entre ellas, la cuestión respecto a la estructura geométrica del espacio real. Sin su descubrimiento no hubiera podido desarrollarse la teoría de la relatividad, uno de los mayores alcances de la física contemporánea. Partiendo de las investigaciones de Lobachevski los sabios construyeron una teoría que permite efectuar el cálculo de los procesos que transcurren en el interior del núcleo atómico.

Para concluir se manifiesta la importancia gnoseológica de las ideas del gran matemático ruso. Antes de Lobachevski, durante el transcurso de muchos siglos, reinaba en la geometría el punto de vista idealista que remontaba a Platón, el filósofo de la Grecia antigua atribuyendo a los axiomas del sistema euclidiano un carácter absoluto éste negaba su procedencia experimental. Lobachevski rompió categóricamente con este punto de vista y retornó la geometría a las posiciones del materialismo.

e. Las geometrías contemporáneas

Con Riemann parecía haberse dado por concluida la revisión crítica de los "Elementos" de Euclides, hasta que el alemán Félix Klein (1.849-1.925) retoma dicha revisión extendiéndola al resto de las hipótesis básicas de la Geometría euclídea. Klein fue ayudante de Plücker en Bonn, y más tarde profesor en Gotinga, donde fundó el Instituto de Matemática Aplicada, desarrollando en él una gran labor docente de notable influencia en el resto de los círculos pedagógicos.

En su obra "Programa de Erlangen" unificó la diversidad de resultados que se obtuvieron en las investigaciones llevadas a cabo hasta entonces sobre los postulados de Euclides, apoyándose para ello en la teoría de grupos de transformaciones de contacto desarrollada por el noruego Sophus Lie (1.842-1.899) en un tratado compuesto por tres volúmenes De esta forma, dio una nueva orientación a la Geometría, definiéndola como elestudio del conjunto de propiedades de las figuras de un espacio de cualquier número de dimensiones que permanecen invariantes frente a los distintos grupos de transformaciones que se puedan definir en él, de lo cualresulta, como se expondrá más adelante, una perfecta y elegante clasificación de los tipos de Geometría, basada en los distintos tipos de grupos de transformaciones.

Los trabajos de Klein también se extendieron a la Geometría noeuclídea, a la que dividió en Geometría Elíptica, correspondiente a la desarrollada por Riemann sobre la hipótesis del ángulo obtuso, y Geometría Hiperbólica, correspondiente a la desarrollada por Lobatschewski y Boiyai sobre la hipótesis del ángulo agudo, y para la que propuso un modelo alternativo al de Beltrami.Todas estas inquietudes surgidas durante la segunda mitad del siglo XIX y principios del XX respecto a la Geometría euclídea, condujeron a la tarea de construir una Geometría sobre unas bases lógicas sólidas, partiendoexclusivamente de postulados que satisficieran las condiciones de: independencia o irreductibilidad, para no convertir un postulado en un teorema; compatibilidad; sencillez y adaptabilidad a las relaciones más elementales del espacio intuitivo, con el fin de que la Geometría fuera una ciencia aplicable a las necesidades de la vida ordinaria sin que perdiera su carácter abstracto independiente del mundo objetivo.

Así nació la denominada Geometría Axiomática, en la cual aparecieron dos tendencias: la psicológica y la lógica.

Dentro de la psicológica destaca la figura de Pasch (1.843-1.930), que dividió los conceptos geométricos en: fundamentales, que no admiten definición, y derivados, definidos a partir de los anteriores. Consideró los axiomas como un grupo de proposiciones que, fundadas directamente en la observación, han de contener todo el material empírico necesario para construir la Geometría, y a partir de los cuales se pueden deducir, mediante demostración, todas las demás proposiciones, que denominó teoremas.

En la tendencia lógica fue el alemán David Hilbert (1.862-1.943) quien con su obra "Fundamentos de la Geometría" dio a esta ciencia el carácter formal evitando todo recurso a la imagen concreta. Para ello consideró inicialmente tres clases o sistemas de objetos indefinidos: puntos, rectas y planos, y además seis relaciones mutuas entre ellos: estar sobre, estar en, estar entre, ser congruente, ser paralelo y ser continuo.

Consiguió su exacta y completa descripción mediante veintiún axiomas distribuidos en cinco grupos: el primero con ocho axiomas relativos a las propiedades de incidencia o enlace, entre los que queda incluido el primer postulado de Euclides; el segundo con cuatro, relativos a las propiedades de orden; el tercero con cinco, relativos a las propiedades de congruencia; el cuarto con tres, relativos a las propiedades de continuidad, entre los que está incluido el de Arquímedes, y el quinto con uno relativo al paralelismo, equivalente al quinto postulado de Euclides.

Esta Geometría Axiomática, bien de una u otra tendencia, ha tenido continuidad a través de las propuestas de otros conjuntos de axiomas alternativos formuladas por geómetras como Moulton (1.872-1.950) que, negando el postulado que resulta de la aplicación del teorema de Desargues al plano, construyó la Geometría no-arguesiana, o bien como Dedekind (1.831-1.916) que, sustituyendo el axioma de Arquímedes por el postulado de continuidad de la recta, estableció la Geometría no-arquimediana.

Como consecuencia de lo anteriormente expuesto, desde los comienzos del siglo XX ha quedado perfectamente establecido el carácter deductivo y puramente formal de la Geometría, que según las teorías de Klein, se puede clasificar en:

- Geometría Métrica (euclídea o no-euclídea), que estudia las propiedades, incluidas áreas y longitudes, que permanecen invariantes frente al grupo fundamental de transformaciones, constituido por las llamadas transformaciones rígidas o movimientos en el plano.

- Geometría Afín, que estudia las propiedades que permanecen invariantes frente a un grupo de transformaciones más general que el de las fundamentales, como es el de las transformaciones afines caracterizadas por hacer corresponder a un punto finito otro punto finito, conservando el paralelismo en sentido euclídeo, pero no necesariamente las áreas y longitudes, aunque mantiene constante la razón de las áreas de las figuras correspondientes, y de la cual es un caso particular la Geometría Métrica.

- Geometría Proyectiva, que estudia las propiedades que permanecen invariantes frente a las transformaciones proyectivas, que incluyen a las afines, y cuya peculiaridad más representativa es la invariabilidad de la razón doble, por lo cual la Geometría Afín es un caso particular de esta.

- Geometría Topológica, que estudia las propiedades que permanecen invariantes frente al grupo de transformaciones proyectivas anteriores, ampliadas con las transformaciones definidas por movimientos Infinitamente pequeños.

La Topología es un tipo de Geometría cualitativa que, incluyendo a todas las anteriores, prescinde de la forma, dimensiones y posición de las figuras^^, y considera solamente en ellas los conceptos de orden, situación, sucesión, conexión y continuidad, para resolver, positiva o negativamente, problemas que habían sido considerados como simples adivinanzas o rompecabezas^^. Algunos de estos problemas topológicos fueron ya tratados por Euler, Móebius y Cantor, siendo Listing (1.808-1.882) el primero que en su obra "Vorstudien zur

Topologie" utilizó la denominación de Topología al tratar este tipo de problemas.

El nacimiento oficial de la Topología se fija en 1.895, cuando el francés Henri Poincaré (1.854-1,912), ingeniero de minas y prolífico escritor, publicó su obra "Analysis Situs", en la que hizo un estudio sistemático de los aspectos cualitativos de las configuraciones espaciales que permanecen invariantes frente a transformaciones biunívocas y bicontinuas. A partir de entonces geómetras y matemáticos tales como Peano, Schonflies, Brouwer, Lebesgue, Hausdorff, Menger, Frechet, etc. han seguido desarrollando esta ciencia que, todavía en fase de formación, ha contribuido fructíferamente al avance no sólo de la Geometría en particular, sino de las Matemáticas en general, e incluso de otras ciencias tales como la Física o la Geodesia.

IV. LA GEOMETRÍA. SIGNIFICACIÓN, IMPORTANCIA, CLASIFICACIÓN, Y APLICACIONES

a. Significación

Al mencionar geometría, se debe en primer lugar, entender el concepto; el origen de la palabra proviene de los vocablos griegos geo (tierra) y metría (medir), "la medición de la tierra"; Efectivamente, al buscar el concepto de Geometría en el Diccionario web de la Real Academia Española [18], se encuentra: del lat. geometrĭa, y este del gr. γεωμετρία. 1. f. Estudio de las propiedades y de las medidas de las figuras en el plano o en el espacio. γεωμετρία es una palabra compuesta de γεω, tierra; y de μετρώ, medida. (p. 1).

En su forma más elemental, la geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área, perímetro y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos. Es decir, la geometría es la parte de las matemáticas que trata de las propiedades y medida del espacio o del plano, fundamentalmente se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos o geométricos.

En la web del Diccionario Ilustrado de Conceptos Matemáticos, Geometría se define como [19]: "El área de las matemáticas que trata las líneas, las figuras y el espacio. La Geometría plana trata sobre las figuras planas como líneas, círculos y el espacio. La geometría esférica trata las figuras sólidas (tridimensionales) como esferas y cubos. (P. 5).

En efecto, [20] define geometría como:Una parte de la matemática que se encarga de estudiar las propiedades y las medidas de una figura en un plano o en un espacio. Para representar distintos aspectos de la realidad, la geometría apela a los denominados sistemas formales o axiomáticos (compuestos por símbolos que se unen respetando reglas y que forman cadenas, las cuales también pueden vincularse entre sí) y a nociones como rectas, curvas y puntos, entre otras.

Los mismos autores, manifiestan, hay que dejar claro que la geometría es una de las ciencias más antiguas que existen en la actualidad pues sus orígenes ya se han establecido en lo que era el Antiguo Egipto. Así, gracias a los trabajos de importantes figuras como Euclides o Pitágoras, mencionados en el capítulo anterior, se ha sabido que desde tiempos inmemoriales aquella estaba muy desarrollada pues era fundamental para el estudio de áreas, volúmenes y longitudes. Asimismo tampoco se puede pasar por alto que una de las figuras históricas que más han contribuido al desarrollo de esta área científica es el matemático, filósofo y físico francés René Descartes. Y es que este planteó el desarrollo de la geometría de una forma en la que las distintas figuras podían ser representadas a través de ecuaciones.

Entre las corrientes de la geometría, se destaca la geometría algorítmica, que usa el álgebra y sus cálculos para resolver problemas vinculados a la extensión. La geometría descriptiva, por su parte, se dedica a solucionar problemas del espacio mediante operaciones que se desarrollan en un plano donde están representadas las figuras de los sólidos. La geometría analítica se encarga de estudiar las figuras a partir de un sistema de coordenadas y de las metodologías propias del análisis matemático. Por último, se puede agrupar tres ramas de la geometría con diferentes características y alcances. La geometría proyectiva se encarga de las proyecciones de las figuras sobre un plano; la geometría del espacio se centra en las figuras cuyos puntos no pertenecen todos al mismo plano; mientras que la geometría plana considera las figuras que tienen la totalidad de sus puntos en un plano [20].

Cualquier área del conocimiento obtenido bajo la rigurosidad del método científico constituye lo que se conoce como Ciencia; sus postulados y principios se han estructurados siguiendo los pasos sistematizados de un método de investigación. Dentro de esta concepción filosófica se enmarca todos los conocimientos de la geometría y su conjunto de teoremas fundamentada en la necesidad de cuantificar, comparar y deducir que ha tenido el hombre durante su proceso evolutivo. Tradicionalmente, su definición etimológica indica que la palabra geometría procede del griego y significa "Medir la Tierra o medida de la tierra". Esta definición se fue mejorando debido a su gran avance en el campo del conocimiento hasta establecer que la misma se deriva del campo de las matemáticas y tiene como objetivo el estudio de las idealizaciones del espacio, su relación con la medida en términos de las propiedades y medidas de las figuras geométricas [21].

La geometría involucra tres clases de procesos cognitivos que cumplen con funciones epistemológicas específicas:Procesos de visualización con referencia a las representaciones espaciales para la ilustración de proposiciones, para la exploración heurística de una situación compleja, para echar un vistazo sinóptico sobre ella, o para una verificación subjetiva; Procesos de Construcción mediante herramientas, la construcción de configuraciones puede servir como un modelo en el que la acción sobre los representantes y los resultados observados están relacionados con los objetos matemáticos que éstos representan;El razonamiento en su relación con los procesos discursivos para la extensión del conocimiento, para la demostración, ara la explicación. Estas tres clases de procesos cognitivos están cercanamente conectados y su sinergia es cognitivamente necesaria para la competencia en geometría [22].

b. Importancia

Mucho se ha escrito acerca de la importancia que tienen las Matemáticas en la vida cotidiana, sea como un instrumento que ayuda con la Contabilización y Operaciones que se realizan en forma prácticamente automática o bien porque ayuda a ejercitar la inteligencia a través de operaciones que requieren de lógica, razonamiento y deducción.

Ahora, siendo la geometría una rama multifacética de las matemáticas. Su riqueza, producto de la estrecha relación con otros dominios matemáticos, las ciencias naturales y sociales y la vida cotidiana, abarca varias dimensiones: biológica, física, aplicada, y teórica explicadas detalladamente en el capítulo anterior. Su gran utilidad e importancia que deriva de esta Ciencia Formal radica en la gran variedad de aplicaciones, siendo auxiliar de una significativa cantidad de ciencias, por cuanto se ocupa de analizar las Formas de las Cosas, para posteriormente realizar una medición de cada una de sus características y cualidades, teniendo distintas convenciones de realizarse e inclusive los más variados instrumentales, donde seguramente utilizan básicamente el Compás para poder realizar y mensurar figuras circulares perfectas, como también la Regla, entre otros materiales didácticos.

Los campos de aplicación de la geometría abarcan una gran variedad desde crear diseños industriales, dibujos artísticos pasando por su aplicación en arquitectura e ingenierías, y en astronomía, medicina, en física aplicada, mecánica, geografía, náutica, topografía, balística y es útil en la preparación de diseños: gráfico, ambiental, de ropa o joyería, la publicidad de una marca, la imagen de una empresa, la creación de artículos son los que le dan vida al comercio y a la economía.

Se destaca entonces que las diferentes aplicaciones de la geometría son importantes para la ciencia y para la vida, por cuanto se confirma que el mundo está formado por diferentes formas y espacios. La geometría ayuda a entender las relaciones espaciales. Crea una percepción clara del espacio y la posición a través del estudio del tamaño y la forma de todo en el mundo. La geometría ayuda a comprender las mediciones y relaciones de líneas, ángulos, superficies y sólidos que se encuentran en el mundo cotidiano. La geometría permite a la gente pensar en formas y tamaños. Conocer las diferentes formas y tamaños permite a la mente visualizar nuevas cosas construyendo con las formas aprendidas. La geometría puede ayudar a unir ambos lados del cerebro. El lado izquierdo del cerebro es el lado técnico impulsado por la lógica, mientras que el lado derecho es el lado creativo y artístico. La mayoría de las personas tienen un cerebro dominante izquierdo o derecho. La geometría puede ayudar a combinar ambos para crear una perfecta simetría entre los dos lados. Tanto las formas bidimensionales como tridimensionales comenzaron en geometría. Estos se encuentran ahora en la televisión, películas, rompecabezas y libros.

La geometría se centra en las propiedades del espacio y las figuras. Simplifica el cálculo de área, perímetro y volumen. También ayuda a las personas a comprender los objetos espacialmente, conceptualizando cómo la posición, el tamaño y la forma de un espacio se relacionan con las cosas dentro de ese espacio. Por ejemplo, si alguien quiere comprar un nuevo lavavajillas, saber cómo encaja este aparato espacialmente con los otros gabinetes, los muebles y electrodomésticos de la habitación ayudan a determinar qué tipo o tamaño de lavavajillas comprar.

Diseñadores y arquitectos tratan constantemente con figuras tridimensionales. Geometría ayuda a determinar cómo se construye un edificio, algo compuesto enteramente de formas tridimensionales. Los profesionales médicos hacen uso de imágenes geométricas con tecnología como tomografías computarizadas y resonancias magnéticas.

Mapeo también requiere una base sólida en la geometría. Las ocupaciones que implican la topografía, la navegación y la astronomía usan mapas para ilustrar dónde se ubican las cosas. Mirar mapas requiere geometría también. Los mapas muestran espacialmente dónde está un destino y, a través de la medición, ayudan a determinar cuánto tiempo se tarda en llegar allí.

Finalmente, pero no menos importante, se presenta la importancia de la Geometría en Educación, Almeida (2002, citado por [23] señala que existen objetivos generales que todo ciudadano debería alcanzar durante su formación básica tener una cultura geométrica con visión histórica e interdisciplinaria, aplicar conocimientos geométricos para modelar, crear o resolver problemas reales, usar los diferentes lenguajes y representaciones, entre otros. A partir de este punto de vista, la geometría se puede considerar como un instrumento reflexivo que le permite al ser humano resolver problemas de diversa índole y comprender un mundo que le ofrece una amplia gama de variadas formas geométricas, en cada uno de los escenarios que lo conforman, sea este natural o artificial (p. 18).

[22] señala, la notable importancia histórica de la geometría en el pasado, en particular como un prototipo de una teoría axiomática, es de tal manera reconocida universalmente, que ya fue comentado en el capítulo anterior. Sobre ello, en el siglo pasado y en las últimas décadas como aseveró Dieudonné, a geometría "exclamando desde sus estrechos confines tradicionales ha revelado sus poderes ocultos y su extraordinaria versatilidad y adaptabilidad, transformándose así en una de las herramientas más universales y útiles en todas las partes de las matemáticas". (p.17).

c. *Clasificación*

En la actualidad, la geometría incluye tal diversidad de aspectos, que no hay esperanza de escribir una lista completa de ellos (y menos aún de usarla). Algunos aspectos que según [24] son particularmente relevantes son:

La Geometría como la ciencia del espacio. Desde sus raíces como una herramienta para describir y medir figuras, la geometría ha crecido hacia una teoría de ideas y métodos mediante las cuales podemos construir y estudiar modelos idealizados tanto del mundo físico como también de otros fenómenos del mundo real. De acuerdo a diferentes puntos de vista, se tiene geometría euclidiana, afín, descriptiva y proyectiva, así como también topología o geometrías no euclidianas y combinatorias.

La Geometría como un método para las representaciones visuales de conceptos y procesos de otras áreas en matemáticas y en otras ciencias; por ejemplo gráficas y teoría de gráficas, diagramas de varias clases, histogramas.La Geometría como un punto de encuentro entre matemáticas como una teoría y matemáticas como una fuente de modelos.La Geometría como una manera de pensar y entender y, en un nivel más alto, como una teoría formal.La Geometría como un ejemplo paradigmático para la enseñanza del razonamiento deductivo.La Geometría como una herramienta en aplicaciones, tanto tradicionales como innovativas. Estas últimas incluyen por ejemplo, gráficas por computadora, procesamiento y manipulación de imágenes, reconocimiento de patrones, robótica, investigación de operaciones.

Otra distinción podría ser hecha respecto a diversas aproximaciones de acuerdo a lo que uno puede resolver con geometría. En términos generales, son posibles las aproximaciones: Manipulativas, Intuitivas, Deductivas y Analíticas.

También se puede distinguir entre una geometría que enfatice las propiedades "estáticas" de los objetos geométricos y una geometría donde los objetos cambian respecto a los diferentes tipos de transformaciones en el espacio al ser considerados en una presentación "dinámica". (p. 3).La geometría es una disciplina muy amplia dentro de las matemáticas, que se divide según los estudios de cada especialidad o tipo de geometría.

A pesar de que existen unos 49 tipos de geometría, estos son los principales tipos de geometría:

Geometría euclidiana. Es la geometría que se basa en el supuesto de Euclides según el cual por un punto dado sólo se puede trazar una recta paralela a una recta dada. Otro postulado de esta geometría es que la suma de los ángulos de cualquier triángulo da 180°.

Geometría plana. Rama de la geometría que estudia las figuras planas.

Geometría espacial: Se ocupa de las propiedades y medida de la extensión de las formas que se pueden expresar con medidas y de las relaciones entre puntos, líneas, ángulos, planos y sólidos en el espacio para definir sus condiciones mediante unas propiedades determinadas del espacio.

Geometría no euclidiana. Si asumimos que no existen líneas paralelas, tenemos una geometría no Euclidiana llamada geometría elíptica.

Geometría riemanniana. Rama de la geometría basada en axiomas diferentes de los utilizados por Euclides en sus Elementos de geometría.

Geometría analítica. Es el estudio de ciertas líneas y figuras geométricas aplicando técnicas básicas del análisis matemático y del álgebra en un determinado sistema de coordenadas.

Geometría diferencial: Estudia de la geometría usando las herramientas del análisis matemático.

Geometría proyectiva: Es una rama de la geometría que estudia los objetos lineales (puntos, líneas, planos, hiper-planos, etcétera) y cómo se intersectan. Geometría Descriptiva: Estudia las formas tridimensionales en un plano bidimensional.

Geometría de incidencia: Es aquella estructura que carece de axiomas de congruencia. Entre otras cosas, la falta de estos axiomas nos impedirá comparar segmentos y establecer una métrica.

Geometría de dimensiones bajas: Estudia problemas geométricos, que surgen en el estudio de variedades de dimensiones menores que 5, espacios localmente homeomorfos a los espacios euclídeos, desde dimensión cero hasta la cuarta.

Geometría algebraica: La geometría algebraica estudia los sistemas de ecuaciones polinómicas con coeficientes en un cuerpo. Los conceptos básicos de la geometría algebraica son: variedades afines y proyectivas, puntos regulares, topología de Zariski, espacios tangentes, dimensión, etc., y estudian las variedades complejas y demuestra que las variedades complejas regulares son variedades diferenciales complejas compactas.

Geometría clásica: es la rama de la geometría basada en los Elementos de Euclides. Se define como la ciencia de las figuras geométricas. Presupone varios conceptos, tales como el punto, la recta, la superficie y mediante comparación de ángulos o longitudes, atribuye ciertas propiedades que definen la geometría euclidiana.

Geometría diferencial de curvas y superficies o geometría diferencial de Gauss, trata del estudio de curvas y superficies, e incluso objetos de más dimensiones denominados variedades. Básicamente, el método consiste en describir las curvas o superficies a estudiar con una función vectorial de unos parámetros, que hacen que un vector se mueva sobre dicha curva al variar el parámetro de forma local.

Geometría diferencial de curvas: propone definiciones y métodos para analizar curvas simples en Variedades de Riemann, y en particular, en el Espacio Euclídeo.

Geometría diferencial de híper-superficies: propone definiciones y métodos para analizar la geometría de hipersuperficies o variedades diferenciales de n dimensiones inmersas en una variedad riemanniana o el espacio euclídeo.

Geometría diferencial de superficies: propone definiciones y métodos para analizar la geometría de superficies o variedades diferenciales de dos dimensiones inmersas en variedades de Riemann y, en particular, en el Espacio Euclídeo.

Geometría diferencial de variedades: es el estudio de la geometría usando las herramientas del análisis matemático y del álgebra multilineal. Los objetos de estudio de este campo son las variedades diferenciables (al igual que en la topología diferencial) así como nociones de geometría de Riemann, por ejemplo las de conexión y curvatura (que no se estudian en la topología diferencial). Las aplicaciones modernas de la geometría diferencial están muy relacionadas con la física, especialmente en el estudio de la Teoría de la Relatividad.

Geometría diferencial discreta: La geometría diferencial discreta es el estudio de las contrapartes discretas de nociones en geometría diferencial. En vez de curvas y superficies suaves hay polígonos, mallas y complejos simpliciales. Se usa en el estudio de los gráficos de computadora y de la topología combinatoria.

Geometría absoluta: sistema axiomático que depende de los primeros cuatro postulados de Euclides, y no del quinto postulado, es decir, el de las rectas paralelas. Engloba, por tanto, la parte común de la geometría euclídea y la hiperbólica; Euclides mismo la utiliza en los Elementos en las primeras proposiciones.Las geometrías elípticas y en particular, la esférica, están fuera de la geometría absoluta, ya que violan el postulado de que dos rectas se corten sólo en un punto. El término geometría absoluta fue introducido por Bolyai en 1832.

Geometría afín: es el estudio de las propiedades geométricas que permanecen inmutables bajo las transformaciones afines, como por ejemplo las transformaciones lineales no singulares y traslaciones. El nombre de geometría afín así como el de geometría proyectiva y geometría euclídea se sigue naturalmente del programa Erlangen de Felix Klein. La geometría afín es un tipo de geometría donde la noción de ángulo está indefinida y las distancias no pueden ser comparadas en diferentes direcciones, es decir, los tercer y cuarto postulados de Euclides son ignorados. Muchas de las propiedades afines son familiares de la geometría euclidea, pero además aplicables a un espacio de Minkowski. Esas propiedades de la geometría euclidea que son preservadas por una proyección paralela de un plano a otro son afines. De hecho, la geometría afín es una generalización de la geometría euclídea caracterizada por una distorsión en la escala e inclinación. La geometría proyectiva es más general que la afín dado que esta puede ser derivada del espacio proyectivo mediante una "especialización" de cualquier plano.

Geometría computacional: es una rama de las ciencias de la computación dedicada al estudio de algoritmos que pueden ser expresados en términos de la geometría. Algunos de los problemas puramente geométricos surgen del propio estudio de dichos algoritmos, y este tipo de problemas también se considera parte de la geometría computacional.

Geometría constructiva de sólidos: Es una de las aplicaciones geométricas y la más utilizada en la geometría que tiene usos muy variados con los cuales pueden facilitar el trabajo de representación dando bases muy sólidas para la construcción de ciertas figuras geométricas. Consiste básicamente en ser una de las maneras de representar los objetos en el espacio o en su forma 3D utilizando tres ejes, por lo general llamados ejes X, Y,Z con los cuales cada uno de estos ejes los podríamos denominar: largo, alto y ancho.

Geometría conforme: es el estudio de las transformaciones conformes (aquellas que preservan ángulos) en un espacio. En dos dimensiones reales, la geometría conforme es precisamente la geometría de las superficies de Riemann. En más de dos dimensiones, la geometría conforme puede referirse tanto al estudio de las transformaciones conformes en los espacios "planos" (como por ejemplo los espacios euclidianos o esferas), o más comúnmente, para el estudio de las variedades conformes que son variedades de Riemann dotadas de una clase de métrica definida a falta de escala. El estudio de esas estructuras se llama a veces geometría de Möbius, y es un tipo de geometría de Klein (disciplina llamada así en referencia al matemático alemán Felix Klein).

Geometría convexa: es la rama de la geometría que estudia sistemas convexos, principalmente en espacio euclidiano. Los sistemas convexos ocurren naturalmente en muchas áreas de la matemática: la geometría de cómputo, el análisis convexo, la geometría discreta, el análisis funcional, la geometría de números, la geometría integral, la programación lineal, y la teoría de las probabilidades. Según la American Mathematical Society en la clasificación 2000, las ramas importantes de disciplina matemática en la geometría convexa y discreta son: Convexidad general, politopos y poliedros, geometría discreta.

Geometría discreta: estudian las propiedades combinatorias de objetos geométricos discretos. La mayoría de las preguntas en geometría discreta implican conjuntos finitos o discretos de objetos geométricos básicos, tales como puntos, líneas, planos, círculos, esferas, polígonos, y así sucesivamente. La geometría discreta se enfoca en las propiedades combinatorias de estos objetos, por ejemplo: cómo se intersecan uno al otro, o cómo pueden ser arreglados para cubrir un objeto más grande.

Geometría esférica: Es la geometría que describe mejor la superficie de la tierra. Es un ejemplo de geometría no euclídea. La geometría esférica tiene importantes aplicaciones prácticas en la navegación y la astronomía.

Geometría finita: es un sistema geométrico que he únicamente un número finito de puntos. identificante, la geometría euclidiana no es finita, ya que la recta de Euclides contiene infinitos puntos, sea que posee tantos puntos como números reales.

Geometría fractal: La geometría fractal busca y estudia los aspectos geométricos que son invariantes con el cambio de escala. Ofrece un modelo alternativo que busca una regularidad en las relaciones entre un objeto y sus partes a diferentes escalas. se construye sobre un espacio "curvado" y juega un importante papel en la teoría general de la relatividad de Einstein. La mayoría de los físicos de hoy día aceptan que nuestro Universo, considerado a gran escala, es un espacio hiperbólico de tres dimensiones que está curvado en su cuarta dimensión. La cuarta dimensión es una dirección distinta de las otras, no está ni arriba ni abajo, ni a la derecha ni a la izquierda, ni dentro ni fuera.

Geometría hiperbólica: se construye sobre un espacio "curvado" y juega un importante papel en la teoría general de la relatividad de Einstein. La mayoría de los físicos de hoy día aceptan que nuestro Universo, considerado a gran escala, es un espacio hiperbólico de tres dimensiones que está curvado en su cuarta dimensión. La cuarta dimensión es una dirección distinta de las otras, no está ni arriba ni abajo, ni a la derecha ni a la izquierda, ni dentro ni fuera.

Geometría molecular: se refiere a la disposición tridimensional de los átomos que constituyen una molécula. Determina muchas de las propiedades de las moléculas, reactividad, polaridad, fase, color, magnetismo, actividad biológica.

Geometría molecular angular: describe la disposición de los electrones en el espacio en torno a aquellas moléculas de tipo AX2E1 o AX2E2, según la VSEPR, es decir, aquellas moléculas con dos pares de electrones enlazantes y uno o dos pares no enlazantes. Debido a la existencia de numerosas moléculas con una de estas dos estructuras electrónicas, este tipo de geometría es predominante.

Geometría molecular bi-piramidal pentagonal: es un tipo de geometría molecular con un átomo central unido mediante enlaces covalentes a siete ligandos situados en las esquinas o vértices de una bipirámide pentagonal.1 Una bipirámide pentagonal perfecta pertenece al grupo puntual molecular.

Geometría molecular bi-piramidal trigonal: la geometría molecular bipiramidal trigonal describe la disposición de seis átomos, cinco de los cuales se ubican en torno a el átomo restante, formando una bipirámide triangular. Se trata de uno de los pocos casos en los que los ángulos de enlace que rodean a un átomo no son idénticos (véase también bipirámide pentagonal), lo cual se debe simplemente a que no existe una disposición geométrica posible con cinco ángulos enlazantes iguales en tres dimensiones.

Geometría molecular cuadrada plana: en química describe la estereoquímica (disposición espacial de los átomos) que adoptan ciertos compuestos químicos. Como el propio nombre sugiere, las moléculas que poseen esta geometría tienen sus átomos colocados en las esquinas de un cuadrado que están en el mismo plano del átomo central.

Geometría molecular de balancín: describe la disposición de cuatro átomos en torno a un átomo central con un par de electrones no enlazantes. La presencia de este par de electrones evita la existencia de una geometría molecular bipiramidal trigonal, ya que la repulsión originada altera los ángulos de enlace de los átomos cercanos, los cuales se disponen formando una figura parecida a la de un balancín.

Geometría molecular en forma de T: describe la estructura adoptada por algunosvao tomar no cu midal trigonal|piramidales]]. Ejemplos de moléculas en forma de T son los trifluoruros de halógeno, por ejemplo, ClF3.1

De acuerdo con la teoría RPECV la geometría en forma de T se da en moléculas de tipo AX3E2 con tres ligandos y dos pares de electrones no enlazantes sobre un átomo central. Los tres átomos exteriores se enlazan al átomo central, formando ángulos de 90° entre sí, produciendo la forma de T.2 De acuerdo con la teoría del enlace de valencia, las moléculas en forma de T poseen hibridación spd. Generalmente se acepta que el orbital d no contribuye a la unión de estas moléculas, que pueden ser descritas de modo más simple mediante la teoría de orbitales moleculares.

Geometría molecular lineal: la geometría molecular lineal describe la disposición de distintos átomos con enlaces de 180º. Las moléculas orgánicas lineales, como el acetileno, suelen presentar hibridación de tipo sp en los átomos de carbono. Este tipo de geometría molecular es uno de los más típicos, incluyendo compuestos como el dióxido de carbono, el ácido cianhídrico y el difluoruro de xenón. También destaca la existencia de múltiples iones de geometría lineal. Los aniones azida y tiocianato, y el catión nitronio son ejemplos de iones cuyos enlaces son lineales.

Geometría molecular octaédrica: En química, se llama geometría molecular octaédrica o Oh a la forma de los compuestos en los que seis ligandos (átomos, moléculas o iones) se disponen alrededor de un átomo o ion central, definiendo los vértices de un octaedro. Se trata de una estructura muy común, y que es muy estudiada por su importancia en la química de coordinación de los metales de transición. A partir de ella se derivan, por deformación contínua, otras geometrías moleculares importantes, como son el octaedro elongado, el octaedro achatado, la pirámide de base cuadrada y el cuadrado plano. Indirectamente, también está relacionada con la geometría molecular tetraédrica.

Geometría molecular piramidal cuadrada: En química, la geometría molecular piramidal cuadrada describe la forma o geometría molecular de ciertos compuestos de fórmula química ML5, donde M es un átomo central y L es un ligando. Si los átomos del ligando estuviesen conectados, la forma resultante sería la de una pirámide de base cuadrada.

Geometría molecular piramidal pentagonal: En química, la geometría molecular piramidal pentagonal describe la geometría molecular o forma de ciertos compuestos químicos en los que seis átomos o grupos de átomos o ligandos se organizan alrededor de un átomo central, en los vértices de una pirámide pentagonal. Es una de los pocos casos de geometría molecular con ángulos de enlace desiguales.

Geometría molecular piramidal trigonal: En química, la geometría molecular piramidal trigonal es un tipo de geometría molecular con un átomo en el vértice superior y tres átomos en las esquinas de un triángulo, en un plano inferior. Cuando los tres átomos en las esquinas son iguales, la molécula pertenece al grupo puntual.

Geometría molecular tetraédrica: La geometría molecular tetraédrica es un tipo de geometría molecular en la que un átomo central se encuentra en el centro enlazado químicamente con cuatro sustituyentes que se encuentran en las esquinas de un tetraedro.

Geometría ordenada: La geometría ordenada es un tipo de geometría que presenta el concepto de intermediación pero, como la geometría proyectiva, omitiendo la noción básica de medición. La geometría ordenada es una geometría básica que forma un marco de trabajo común para las geometrías afín, euclidiana, absoluta e hiperbólica (pero no la geometría proyectiva).

Geometría sagrada: El término Geometría Sagrada hace referencia al conjunto de formas geométricas que se encuentran presentes en el diseño de ciertos sitios considerados sagrados, principalmente iglesias, catedrales y mezquitas, junto con los significados simbólicos y esotéricos que se les atribuyen basándose en sus propiedades.1 Debido a su trasfondo religioso y filosófico, su énfasis en la geometría y la matemática y su relación con la construcción de catedrales, la geometría sagrada es asociada con la masonería. Algunas personas que trabajan con la geometría sagrada2 afirman que estimula ambos hemisferios cerebrales a la vez; el derecho por estar relacionado con habilidades artísticas y viso-espaciales, y el izquierdo por estar relacionado con la matemática y la lógica, aunque cabe aclarar que esto se trata de una sobre-simplificación de la actividad cerebral y la especialización de cada hemisferio.

Geometría sintética: es una rama de las matemáticas, que se encarga de estudiar y construir de manera sintética las formas y lugares geométricos. Se dice que la geometría pura o sintética es aquella que puedes construir axiomáticamente (con un sistema axiomático), con un tratamiento lógico-deductivo; es decir, a partir de una serie de axiomas o postulados (que se adopten a priori) se comienza a construir y demostrar proposiciones lógicas; que se sustentan como en una especie de eslabones de una cadena de razonamiento. La mayor diferencia entre la geometría analítica y la geometría sintética, radica en el estudio y tratamiento que se les da a éstas, por ejemplo, en la geometría analítica el uso del álgebra, en especial el álgebra lineal, es fundamental, sin embargo, para la geometría pura no es tan indispensable el enfoque algebraico (sin que esto signifique su exclusión).

La geometría sintética o geometría pura se basa en el enfoque axiomático de la geometría en oposición a la geometría analítica. Parte de los axiomas y deduce los teoremas empleando las reglas de la lógica, rechaza sistemáticamente de utilizarlas propiedades analíticas de las figuras y utilizar las coordenadas.

Luego de todo este recorrido por las distintas acepciones de la geometría, se puede destacar que la geometría es una rama multifacética de las matemáticas. Su riqueza, producto de la estrecha relación con otros dominios matemáticos, las ciencias naturales y sociales y la vida cotidiana, abarca varias dimensiones.

Los mismos autores manifiestan que, en la multidimensionalidad de la geometría coexisten dos polos en permanente tensión: el empírico, donde se ubican la percepción, la intuición, la visualización y el carácter instrumental de la geometría; y el teórico, relacionado con los aspectos abstractos, conceptuales, deductivos, formales y rigurosos de la geometría, como disciplina científica. Los llamamos polos para resaltar su carácter de oposición y de mutua dependencia. Cada uno de ellos atrae la actividad en geometría en una dirección, pero no es posible hacer geometría prescindiendo de uno de ellos. La mutua dependencia entre el polo empírico y el teórico de la geometría puede evidenciarse a lo largo de su historia, siempre ligada a la dinámica de las actividades humanas, sociales, culturales, científicas y tecnológicas. Mediada por diversas herramientas materiales o simbólicas, la geometría se vincula a experiencias individuales y grupales que producen diferentes niveles de sofisticación del conocimiento, útiles para resolver problemas, producir obras de arte, interpretar hechos o dar explicaciones, entre otras cosas.

La dinámica evolutiva de la geometría permite concluir que si bien ésta ha adquirido el estatus de disciplina científica, se encuentra íntimamente relacionada con la percepción espacial y en esta halla su fuente de significado, bien sea para afinarla o para superarla. Los avances en geometría no provienen únicamente de las investigaciones en matemáticas, sino que tienen una gran variedad de fuentes: las artes, los oficios, la técnica, las ciencias. Este hecho destaca el carácter vivo de la geometría y su riqueza cultural. El renacer de los aspectos visuales, gracias al potencial de los recursos informáticos, ha puesto en equilibrio los procesos de visualización y los procesos de justificación que permiten trabajar en geometría significativamente. Así es como en la actualidad se reconoce la imposibilidad de independizar los dos polos de la actividad geométrica, y se resalta más bien su mutua dependencia y su complementariedad.

d. Aplicaciones

A continuación se presentan, múltiples aplicaciones de la geometría en las distintas áreas del conocimiento, las mismas a través de trabajos de investigación, libros y documentos, publicados en el mundo a través de revistas arbitradas e indexadas, con un nivel de relevancia y pertinencia aptos en estos tiempos, como Scopus, Scielo, Latindex, Emerald Insight, Ebsco Host, UptoDate, LEGISComex.

1. Medicina

[25] Elaboraron un trabajo de investigación en Chile titulado: “La Geometría de los seres vivos y su importancia en la medicina”, cuyo objetivo fue analizar los conceptos más relevantes que emergen de las ciencias de la complejidad, mostrando ejemplos y derivando consecuencias que podrían ser de utilidad conceptual y práctica en medicina.

En su primera parte, analizaron los Fractales: La Geometría de la naturaleza, allí destacan los aportes de [26] quién creó el concepto de fractal para objetos de morfología irregular, plegados sobre sí mismos o ramificados. Inicialmente restringidos a objetos abstractos, posteriormente el mismo [26] extendió el concepto a las formas de la naturaleza. Caracterizaron los objetos fractales, indicando en primer lugar, la capacidad de vencer su propia dimensión. “Por ejemplo: Si tomamos en la mano una hoja de papel, ésta representa un plano, cuya dimensión es D = 2. Si ahora, arrugamos fuertemente esta hoja hasta formar una pelota de papel: ¿Qué dimensión tiene ahora, 2 ó 3? Este objeto, aun ocupando un espacio de dimensión 3, sigue siendo un plano de dimensión 2” (p. 3). Esta es una de las propiedades de los objetos fractales: la capacidad de «vencer» su propia dimensión, mediante convolución o fraccionamiento, ocupando un espacio de dimensión superior. Para caracterizar este hecho se utiliza el concepto matemático de dimensión fractal. Una segunda característica de los objetos fractales es la propiedad de la autosimilitud, caracterizada por la presencia de «simetrías» invariantes bajo contracción o expansión (invarianza bajo escala). Cada parte debería ser una reducción geométrica de la totalidad con la misma escala en todas las direcciones8, sin embargo, hoy día el concepto se ha extendido en sentido amplio a mayor número de escalas. Existen muchos ejemplos de morfología fractal en la naturaleza: las neuronas, el tubo digestivo y sus pliegues, la superficie alveolar, el árbol bronquial, la vascularización, los árboles, las costas etc. Sin embargo, las formas naturales difieren de los fractales matemáticos en que son estructuras finitas, donde la autosimilitud no puede mantenerse hasta el infinito. Así, en general, las estructuras terminales no son similares a la totalidad. Ni las hojas se parecen al árbol ni los alvéolos a la vía aérea. (p. 4).

Seguidamente, analizaron las Dinámicas no lineales, caos y su relación con los fractales. La palabra caos habitualmente se asocia a desorden. Sin embargo, en términos matemáticos y físicos el caos determinístico corresponde a la irregularidad impredecible de las trayectorias temporales de un cierto sistema. Su origen se encuentra en sistemas que, aunque pueden ser muy simples, son no-lineales y muy sensibles a las condiciones iniciales. En los sistemas no-lineales la función F(X,t) no es lineal. En éstos, los ejes coordenados (o variedades) que los definen son curvas que pueden entrecruzarse generando nuevos puntos. Así, podemos visualizar el espacio de fases de un sistema no lineal como un campo «minado» por un conjunto de puntos y líneas que condicionan las trayectorias del sistema. En estos sistemas, las trayectorias son dependientes de la cercanía con este entramado de puntos y líneas, pudiendo ocurrir que dos puntos que inician su trayectoria muy cerca uno del otro, se encuentren en posiciones muy alejadas después de un pequeño intervalo de tiempo. Esto es lo que se conoce como sensibilidad a las condiciones iniciales [25].

Finalmente, analizaron el Modelo de los “Sistemas vivos”: premisas básicas y predicciones.

Utilizando una definición meramente operativa se puede llamar sistema vivo a cualquier sistema que incluya vida en cualquier nivel de organización, pasando por los niveles molecular, celular, de órganos, sistemas de órganos, individual, poblacional, comunitario, ecosistemas, etc. Tienen una frontera con la que establecen el intercambio de energía con el medio, estructura (componentes) y organización (relación entre sus componentes). Tienen además dos aspectos dinámicos: un origen y desarrollo (ontogenia) y una conducta o comportamiento. Se puede ver que cualquier sistema vivo, incluyendo los seres vivos, es un sistema termodinámicamente abierto, alejado del equilibrio. Es por tanto un sistema disipativo autónomo que mantiene su estructura y organización mediante el intercambio de energía con el medio, con mínima producción de entropía. A pesar del transcurso del tiempo y los cambios en estructura, podemos reconocerlos como tales independientemente de las pequeñas perturbaciones externas, mientras permanezcan termodinámicamente abiertos. Es decir, se pueden considerar como sistemas robustos o estructuralmente estables. (p. 10).

Estos sistemas son generados durante el desarrollo (embriogénesis) por sistemas dinámicos en que la interacción entre los componentes es esencialmente no lineal y además la conducta que realizan es del mismo tipo. Así por ejemplo, en el desarrollo de un órgano intervienen gran cantidad de factores que interactúan en forma no lineal para producir la forma final de éste. Además la función de este órgano depende de otros múltiples factores interactuando no linealmente entre ellos.

Si los sistemas vivos son sistemas críticos, entonces se deberían encontrar formas fractales e invarianza de escala caracterizada por leyes de potencia en cada nivel de organización. Además se deberían encontrar dinámicas no lineales en la ontogenia y en la conducta, función o evolución de estos sistemas. En este sentido, la dinámica no-lineal compleja (incluyendo el caos) caracterizaría la dinámica de las formas y, la geometría fractal caracterizaría la forma de las dinámicas Los ejemplos en ciencias biológicas y medicina, se presentan en dos formas:

I) La forma de las dinámicas: fractales y energía [26] caracterizaron a los organismos vivos como híbridos área-volumen y los consideraron como biorreactores, sistemas de catálisis enzimática heterogénea gobernados por reacción y transporte de masa, esencialmente turbulentos. Además lograron relacionar estas características con la geometría fractal (equivalente estructural de la turbulencia) de los sistemas de transporte de los organismos, determinando que la reducción del metabolismo masa específico con la masa es la consecuencia fisiológica de estos hechos. Del mismo modo, [27], considerando que la vida se sostiene por el transporte de materiales a través de ramificaciones fractales que distribuyen materiales con mínima pérdida de energía, propusieron un modelo que permite predecir el exponente alométrico de Kleiber (1961), b = 3/4 para la relación entre metabolismo y masa. Con una generalización de este modelo es posible predecir los exponentes alométricos de gran cantidad de funciones cardiovasculares y respiratorias. La superficie digestiva corresponde a un sistema tubular plegado sobre sí mismo, que en su lumen alberga una superficie epitelial repleta de pliegues que, a su vez, presenta vellosidades y microvellosidades. Esta ha sido reconocida como de naturaleza fractal y es otro ejemplo de optimización de diseño, evidenciada por el ajuste del tamaño de las cámaras gástrica y cecal en rumiantes y equinos con una máxima absorción de energía y también por el ajuste entre las tasas de flujo de digestión, digestión enzimática y absorción de nutrientes en el intestino delgado. Otros ejemplos de fractales son las redes vasculares y la vía respiratoria. Ellos además son ejemplos de optimización caracterizada por una mínima resistencia hidrodinámica y mínima producción de entropía. También la superficie alveolar ha sido descrita como un fractal de dimensión 2.1 que presenta avanzados aspectos de optimización a nivel de la barrera alveolocapilar. Así, la superficie interna de la vía respiratoria y del tubo digestivo obedecería a un principio general de optimización, que conduce a una morfología fractal. Ambas superficies necesitan maximizar la adquisición de energía y materiales y ambas se despliegan en volúmenes restringidos. (p. 12).

II) Criticalidad y universalidad. Subyacente a la diversidad de los sistemas vivos y la complejidad de su conducta, origen o función, es posible encontrar un orden o geometría que refleja la operación de procesos físicos o biológicos fundamentales. La universalidad de las leyes de potencia y la universalidad de las características dinámicas parecen revelar un principio aún no comprendido, común a todo sistema vivo. Por ejemplo, las leyes de potencia que develan la ausencia de una escala característica, son comunes en la fisiología y la ecología. En particular, como hemos mencionado, las leyes de potencia 1/4, cuyo exponente es múltiplo de 0,25, son habituales a nivel de la fisiología y en la ecología. Además, en las dinámicas de un gran número de procesos biológicos es posible detectar las dinámicas complejas, evidenciadas por un ruido 1/f en el análisis espectral. Por ejemplo, entre otras, en las necesidades de insulina en diabéticos, la frecuencia cardiaca en sujetos normales, el brote de semillas, conducta en ratas, dinámica de poblaciones de insectos y parasitoides, extinciones de especies, fluctuaciones de modulación en emisiones de radio tan disímiles como una conversación y un concierto clásico y reproducción de intervalos espaciales en el aprendizaje. Uno de los ejemplos clásicos de universalidad y criticalidad de sistemas es la percolación. Este fenómeno se encuentra habitualmente en biología en la propagación de epidemias (geometría del contagio) y en la propagación de incendios forestales. Otras evidencias de sistemas críticos en biología se encuentran en los cambios de fase en la conducta de forrajeo en hormigas, en la diversidad de paisajes boscosos, dinámica meta-poblacional, epidemias en poblaciones de insectos, distribución de espacios abiertos en bosques y la extinción de especies de aves en las islas hawaianas. (p. 15).

2. Arquitectura

La Geometría, es el estudio del espacio. La Arquitectura y la geometría son dos disciplinas virtualmente inseparables, excepto por una diferencia: la Geometría puede existir sin la Arquitectura, pero la Arquitectura no puede existir sin la geometría. Es necesario analizar el espacio, conocerlo a fondo y organizarlo en forma inteligente.

La Geometría Descriptiva aplicada a la arquitectura tiene básicamente dos objetivos: la enseñanza de los sistemas de representación y el estudio de las superficies y formas geométricas que se emplean habitualmente en las obras de arquitectura; ambos objetivos se alcanzan simultánea y recíprocamente, puesto que el conocimiento de los sistemas se adquiere representando las formas y, a su vez, las formas se conocen representándolas, por ello es necesario que el alumno aprenda a representar y comprenda lo que se representa.

La realización de un proyecto arquitectónico introduce en el ambiente una alteración, una alteración espacial. Volúmenes, superficies, líneas y sus articulaciones plásticas y cromáticas concurren juntas al crear, tanto en el interior como en el exterior del edificio, espacios cuya calidad dependerá también de la relación dimensional con el hombre. El espacio es siempre, en alguna medida, dinámico, precisamente porque es visible y disfrutable desde diferentes puntos de vista, y porque nunca es posible hablar de un solo espacio: por lo menos son dos, el exterior y el interior; pero habitualmente son muchísimos, porque hasta un edificio sencillo presenta numerosas articulaciones. [28]Dado que la geometría se ocupa de figuras, líneas y formas, tiene muchas aplicaciones prácticas en el campo de la arquitectura. Una comprensión de la geometría es completamente esencial para el diseño arquitectónico, tanto en un sentido práctico (tales como el cálculo de carga segmentos de una estructura) y en consideraciones estéticas (tales como simetría de un edificio o escala con su entorno).

El mismo autor manifiesta que un edificio, ya sea se trate de una casa o un rascacielos, se puede considerar como una serie de elementos estructurales interrelacionados diseñados en principios geométricos. Las líneas y formas están diseñadas para trabajar en conjunto para crear la integridad estructural en aplicaciones específicas. Por ejemplo, el techo de una casa en un área propensa a fuertes nevadas será un triángulo con los lados para permitir lados más en pendiente para que caiga más nieve, mientras que un techo plano sería más adecuado en un clima seco y cálido.

Finalmente señala [28] que los cálculos geométricos se usan también para garantizar la seguridad en la elaboración de una estructura. En un gran edificio con estructura de acero, por ejemplo, se realizan cálculos para determinar la carga de peso sobre la base del edificio, y la rejilla formada por rectángulos más pequeños se utiliza para distribuir el peso de manera uniforme para asegurar la integridad estructural del edificio. Incluso en estructuras de construcciones residenciales, los cálculos geométricos se usan para determinar los elementos de soporte de carga, como vigas del piso y preocupaciones prácticas como la pendiente de la cubierta.

3. Ingeniería Civil

[29] menciona que la aplicación de la geometría analítica en la rama de la ingeniería civil (estructuras) es con la finalidad de conseguir estructuras funcionales que resulten adecuadas desde el punto de vista de la resistencia de materiales. La geometría vectorial es la más utilizada, ya que con ella el mundo está compuesto por vectores. Por consiguiente pasamos a mencionar dichas aplicaciones de la geometría analítica en la ingeniería civil: En la edificación de carreteras y autopistas aplicando conceptos sobre trazos de la recta. En la mecánica de suelos y geotecnia se puede utilizar las ecuaciones lineales para determinar la porosidad de los suelos. En el análisis y diseño estructural utilizando la teoría de vectores en el espacio, determinando la cantidad de materiales que se emplea en una obra. En los distintos campos de la ingeniería civil: En la construcción de puentes colgantes: Utilizamos la aplicación de las parábolas. Para las aplicaciones de obras, máquinas perfeccionando sus diseños, antes de iniciar la construcción de obras. Para la creación de modelos o diagramas de planificación actividades en las obras. En el campo de la hidráulica podemos determinar la velocidad de la caída de un chorro de agua y también su alcance horizontal. Otras aplicaciones Para el estudio de represas, puentes, puertos y túneles creando modelos de estudio.

Definitivamente, es imposible poder reflejar en un solo documento, como el presente, las aplicaciones de la geometría en cada rama del saber, sin embargo, aquí se reflejan, múltiples aplicaciones, su importancia, profundidad y necesidad de su uso para la garantía de un mejor vivir.

4. Ingeniería Aeronáutica

[30] son Polacos, realizaron una trabajo de Investigación titulado: "La evaluación de la precisión geométrica de las palas de los motores de aeronaves con el uso de un escáner de coordenadas ópticas"; el mismo tuvo como propósito presentar las posibilidades del sistema de medición de coordenadas en el sentido de la evaluación geométrica de la exactitud de los elementos de la zona caliente en los motores de aeronaves. El objetivo del trabajo es demostrar que este método, que utiliza luz azul y es el método más económico y suficiente, puede ser utilizado en la línea de producción para la fabricación en serie de elementos, para los que se requiere un alto nivel de precisión. El análisis de la precisión geométrica de las cuchillas se realizó utilizando el escáner de coordenadas ópticas sin contacto:

ATOS Triple Scan II Blue Light, fabricado por GOM Company, del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Tecnología de Rzeszów. Se realizó un análisis geométrico para las cuchillas fabricadas a partir de diferentes ceras (A7Fr / 60 y RealWax VisiJet CPX200), comparando así la técnica de inyección con el método de prototipado rápido (RP) y la fundición de súper-aleaciones a base de níquel Inconel 713C. Este artículo presenta la posibilidad de utilizar el sistema de medición ATOS Triple Scan II Blue Light para mediciones de precisión geométrica en caso de álabes de sección caliente de motores de aeronaves.

Esta investigación es original porque describe tres medidas de exactitud geométrica del modelo, el modelo de cera obtenido mediante la técnica de inyección, el modelo de cera obtenido mediante el proceso IRP y la fundición de la súper-aleación de níquel Inconel 713C.

V. ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

[31] señalan que "la Geometría es una invención griega, sin la cual la ciencia moderna sería imposible. En su obra Historia de la Filosofía Occidental, Bertrand Russell expresó su admiración por los logros fenomenales de la cultura científica en Grecia". Tal vez la cita anterior da una razón suficiente por la cual la geometría se debe enseñar hoy y en el futuro y en el futuro del futuro.(p. 9). Así pues, la enseñanza de la Geometría ha sido, es y seguirá siendo indispensable para la construcción y comprensión del espacio.

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003,citado por [32]señala:la geometría como la materia mediante la cual el estudiante estudia las formas y estructuras geométricas, y aprende a analizar sus características y relaciones. A la vez señala la visualización espacial como un aspecto importante del pensamiento geométrico, sin dejar de mencionar la construcción de modelos geométricos y el razonamiento espacial como una manera de describir el entorno; todo lo cual la constituye en una herramienta importante en la resolución de problemas, ya sea geométricos o de otras áreas de las Matemáticas o del conocimiento en general" (p. 76).

Se presenta pues, la geometría como un área que no solo estudia las formas y estructuras geométricas sino que las analiza, también destaca la visualización espacial y razonamiento espacial para el desarrollo del pensamiento geométrico y así la descripción del entorno, todo esto es concebido por el autor como una importante herramienta para la resolución de problemas.

Así también, [33] sugieren que la enseñanza de la Geometría gire en torno a la resolución de problemas que impliquen el uso de relaciones y conceptos geométricos. (p.77). De esta manera, se encuentra como punto común que la enseñanza de la geometría debe ir dirigida principalmente a la resolución de problemas.

Igualmente los mismos autores expresan que dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría se debe enfrentar a los estudiantes a tareas que le den la oportunidad de construir conceptos, investigar relaciones y explicarlas, probarlas y, de ser posible, demostrarlas. (p.80) es decir, que el aprendiz sea protagonista y activo en su propio proceso de aprendizaje y lleve a cabo diferentes tareas que tendrán como fin último una correcta demostración.

[34]sugiere que en la enseñanza de la geometría deben los docentes promover una manera de edificar el conocimiento desde una perspectiva crítica compleja, donde el estudiante parta de lo concreto para llegar a lo abstracto o de lo abstracto para llegar a lo concreto (p. 231). Por su parte [33] expresan que el punto de partida para el aprendizaje de la Geometría es el entorno físico (p. 80). Así pues, esta debe abordarse con una visión crítica e ir dirigida a que el educando para su aprendizaje ponga en práctica una gama de operaciones intelectuales que lo lleven a interconectar los conocimientos geométricos adquiridos en clases con el mundo real para el logro de sus aprendizajes.

De esta manera, para la orientación de la enseñanza de la Geometría, existen diferentes modelos, [35]Joyce y Weil, (1985) exponen “Un modelo de enseñanza es un planestructurado que puede usarse para configurarun curriculum, para diseñar materiales de enseñanza y para orientar la enseñanza en lasaulas” (p.2) Por otra parte, [36]manifiesta:“Los modelos de enseñanza son una actividad generalizada pues todos losdías, los docentes de todos los niveles educativos abordan sus procesos deenseñanza¬ aprendizaje desde ciertos modelos. Dichos modelos están más o menos articulados y se fundamentan en teorizaciones que permiten a los profesores, con mayor o menor éxito, ejercer su profesión” (p.1)

De esta manera, se puede afirman que los modelos de enseñanza corresponden a procedimientos y parámetros estructurados que se siguen dentro de la práctica docente.A continuación se presenta algunos existentes en el área Geometría, como lo son los niveles de razonamiento para la construcción geométrica, presentados por los autores [37], el Modelo de Van Hile (1957, citado por [26]) y otros modelos considerados pertinentes.

a. Modelo Duval

De acuerdo con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría involucran, como mínimo, tres actividades cognitivas [37]:

La construcción, que alude al diseño de configuraciones mediado por instrumentos geométricos; el razonamiento relacionado con procesos discursivos y la visualización, cuya atención recae en las representaciones espaciales. Cada actividad tiene funciones epistemológicas distintas; la visualización, por ejemplo, permite la ilustración de proposiciones, la exploración heurística de situaciones complejas, miradas sinópticas sobre ellas y verificaciones subjetivas. Si bien cada una puede ser aprendida o enseñada de manera independiente o separada, la articulación entre ellas es requisito ineludible para asegurar el aprendizaje de la geometría. Para lograr que haya sinergia entre esas actividades, es necesario, en primera instancia, separar las diferentes maneras de ver que subyacen a su aprendizaje y luego diferenciar los tipos de razonamiento que conviven en el aprendizaje de esta disciplina, lo uno y lo otro es lo que da base para el aprendizaje de las construcciones. La visualización, pues, se impone como elemento crucial en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Entre los distintos tipos de representaciones que se movilizan en la geometría, las figuras juegan un papel determinante, pues constituyen un importante soporte intuitivo para la actividad geométrica ([37]. Como todo tipo de sistema de representación semiótico, los requeridos por la geometría exigen la puesta en acto de dos clases de transformación para asegurar la comprensión de los objetos matemáticos en que se reflexiona: la conversión y el tratamiento, este último interior, la primer exterior al sistema de representación en juego [37]. Para describir cuál es el aporte heurístico de una figura en el desarrollo de una actividad matemática, es necesario distinguir el tipo de aprehensión susceptible de sugerir la solución al problema planteado. [37] mostró que una figura puede dar lugar a aprehensiones de naturaleza diferente: perceptual (identificación perceptiva espontánea), operatoria (transformación heurística de las figuras) y discursiva (reconocimiento de unidades figurales y variabilidad dimensional intrafigural). Y que en algunos casos estas formas de discriminación se subordinan unas a las otras, se relacionan y, en otros, se oponen [37].

Para avanzar en el aprendizaje de la geometría los estudiantes deben pasar de un discurso informal basado en una argumentación descriptiva, a un discurso formal, que apoyado en la visualización se genere un razonamiento que no se basa en una simple descripción de una figura, sino que encadena proposiciones usando inferencia lógica, donde se enuncia definiciones y teoremas [38].

Los niveles de razonamiento geométrico que propone Duval, constituyen una base teórica general que puede servir como marco de referencia para investigaciones en geometría. Al igual que este autor, otros hacen sus aportes proponiendo otros marcos teóricos que intentan categorizar estos razonamientos de los individuos con respecto al estudio de la geometría.

b. Modelo Van Hile

Seguidamente, se presenta el marco conceptual que propone Van Hiele. Jaime (1995, citado por [14]) señala:

Que el modelo de Van Hiele surgió producto de la observación de los problemas cotidianos que se presentan en las aulas. Los Van Hiele eran dos esposos holandeses, profesores de secundaria, que reflexionaron sobre la problemática relacionada con la incomprensión, por parte de los estudiantes, de la materia que ellos les explicaban. El mismo autor señala que aunque se han formulado varias explicaciones sobre el aprendizaje de las personas, centrado en la geometría, el modelo más específico es el formulado por los Van Hiele. Así, este modelo, a pesar de la “antigüedad”, representa las actuales líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas y constituye una teoría propia en la investigación en geometría [39]. Este modelo incluye dos aspectos, uno descriptivo y otro prescriptivo. [40] señala que el primero intenta explicar cómo razonan los estudiantes a través de una secuencia de niveles de razonamiento. Van Hiele (1957, citado por [40]señala que en el proceso de formación de la comprensión en geometría: 1. Se produce una estructuración del campo perceptivo. El caso de si esta estructuración es o no repentina no tiene mucha importancia puesto que ello no juega un papel determinante en el proceso de aprendizaje. 2. La estructuración del campo perceptivo va unida a distintas palabras. una simple descripción de una figura, sino que encadena proposiciones usando inferencia lógica, donde se enuncia definiciones y teoremas [14]. 3. El proceso mental acerca de las figuras se va desarrollando cada vez más en el terreno verbal, es decir, la estructuración perceptiva se va convirtiendo paulatinamente en estructuración lingüística. 4. Se crea cierta autonomía en la estructuración lingüística. Ciertas agrupaciones de premisas llevan automáticamente a determinadas conclusiones, o a la inversa, la búsqueda de ciertas conclusiones lleva automáticamente a la búsqueda de ciertas premisas El mismo autor señala que al formarse la comprensión geométrica nos encontramos por tanto con tres estructuraciones: una estructuración perceptiva, una estructuración lingüística y una estructuración lógica. Así, según se progresa en geometría se elimina cada vez más el lenguaje, de manera que se pasa directamente de la estructuración perceptiva a la simbología sin haber usado el lenguaje. (p. 15-16).

Los niveles de razonamiento geométrico en el modelo de Van Hiele, los cuales establecen que la forma en que se conciben los conceptos geométricos no es siempre la misma y varía conforme el alumno va progresando en el estudio de las matemáticas. Estos niveles de razonamiento no están asociados con la edad de los estudiantes, pues dependen de la enseñanza recibida por cada uno, así como de sus experiencias.

El mismo autor, presenta los cinco niveles de razonamiento de Van Hiele:

Nivel 1: Visualización o reconocimiento. En este nivel los conceptos son considerados de forma global, no se tienen en cuenta elementos, propiedades o atributos. No se generalizan características de una figura a otras de su misma clase. La descripción de los objetos se hace por percepciones visuales.

Nivel 2: Análisis En este nivel los conceptos se entienden y manejan a través de sus propiedades. El estudiante identifica y generaliza propiedades de un determinado concepto, pero no establece relaciones entre ellas. Todo descubrimiento o verificación lo hace a través de la experimentación. Para definir un concepto dan una lista de propiedades, agregando algunas innecesarias u omitiendo otras imprescindibles; no realizan clasificaciones inclusivas.

Nivel 3: Ordenación o clasificación La característica principal de este nivel es que los estudiantes pueden establecer relaciones entre las propiedades. Se parte de la experimentación para crear la necesidad de recurrir a una justificación formal a partir de propiedades conocidas, se aceptan definiciones nuevas de conceptos conocidos, aunque impliquen variación de algunas características de las anteriores y se utilizan clasificaciones inclusivas. Siguen las demostraciones, pero en la mayoría de los casos, no en situ atienden su estructura. Se establecen relaciones entre los diversos conceptos a partir de sus definiciones.

Nivel 4: Deducción formal En el cuarto nivel se efectúan demostraciones formales, vinculando implicaciones simples para llegar desde la hipótesis hasta la tesis. Aceptan la existencia de definiciones equivalentes y de demostraciones alternativas.

Nivel 5: Rigor En este nivel se conoce la existencia de distintos sistemas axiomáticos (p. 17).

Una de las teorías más utilizadas para estudiar el desarrollo del pensamiento Geométrico es la teoría de Van Hiele (1986, citado por [40]), Adulyasas y Rahman (2014), sostiene:

Que un estudiante desarrolla una comprensión de Geometría progresando a través de cinco niveles distintos de una manera jerárquica [26]. Los niveles de pensamiento geométrico y la instrucción basada en la fase Defendido por Van Hiele se ha aplicado en muchos estudios relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. La instrucción de fase propuesta por van Hiele es una de las Métodos de enseñanza estudiados por muchos investigadores en Tailandia para desarrollar Pensamiento geométrico de los estudiantes. Los estudios han descubierto que después de que los estudiantes Fase-basada, su pensamiento geométrico realizado y su actitud hacia la geometría mejoró [15]. Además, los estudiantes también tienen logros geométricos más. Sin embargo, un estudio de [25] ha encontrado que Los profesores tienden a no utilizar la teoría de Van Hiele del pensamiento geométrico en su aula Porque están preocupados por el tiempo y no quieren crear más Lección compleja que la tradicional.

El modelo tiene varias características que son importantes de conocer, para evitar posibles confusiones o interpretaciones inadecuadas bajo este marco conceptual: (a) Secuencialidad: En la adquisición de los niveles, no es posible alterar su orden. (b) Especificidad del lenguaje: Cada nivel tiene su lenguaje propio. (c) Paso de un nivel al otro: El paso de nivel al otro no se hace de forma abrupta, sino que hay un periodo durante el cual se presentan razonamientos de dos niveles (estado intermedio). (d) Globalidad y localidad: Las investigaciones parecen indicar que el nivel de razonamiento es local, es decir, el nivel en el que un estudiante se encuentra para un determinado concepto puede variar para otro. (e) Instrucción: La adquisición de sucesivos niveles no es un aspecto biológico, pues intervienen en gran medida los conocimientos recibidos y la experiencia personal [27].

El propósito de presentar los niveles de razonamiento geométrico de Duval y de Van Hile, es que los profesores tengan conocimiento de que el razonamiento geométrico sigue un proceso evolutivo; se trata de conocer los rasgos que caracterizan cada uno de estos niveles, no se trata de que, a partir de este conocimiento, el profesor etiquete a los alumnos según los niveles establecidos por la teoría de Van Hiele. La pretensión es que el profesor comprenda y tenga presente la forma de razonar de los estudiantes y este conocimiento le permita diseñar actividades que les llevan a niveles más altos de razonamiento.

c. Otros modelos de enseñanza de la geometría

[21]en su Tesis Doctoral titulada “Modelo didáctico para la enseñanza de la geometría en Educación Primaria. Una aproximación teórica desde la perspectiva del Pensamiento Complejo”, tuvo como propósito generar el respectivo modelo, utilizando un método etnográfico – hermenéutico con el fin de generar un conocimiento más humanizado. Concluye que la enseñanza de la geometría debe favorecerse con formación y capacitación de los docentes en el área.

La misma autora manifiesta que la enseñanza de la geometría es cada día más requerida debido a las nuevas exigencias socio-culturales, desde cualquier nivel de la educación, porque presenta la oportunidad de estudiar y dar explicación a circunstancias del mundo concreto para convertirlo en principio de reflexión y discernimiento. En el mismo vínculo pedagógico, cabe destacar que cualquier acción, por sencilla o compleja que sea, está sujeta a la noción comparativa, es decir, se enmarca dentro de la generalidad de medida y sus relaciones y de allí, la necesidad de enseñar geometría en el nivel de educación primaria.

Los elementos constitutivos para la construcción del modelo didáctico de la enseñanza de la geometría en Educación Primaria, emergieron por una serie de esquemas llamados posteriormente ejes, que sirven de sustentación, ellos son:

El eje Enseñanza de la Geometría está referido a la necesidad de adecuar los contenidos de esta área en cuanto al conocimiento de formas y figuras geométricas, cálculos, utilidad de instrumentos de medidas y comparaciones con el entorno que están intencionados en el área matemática de cada grado de esta manera llevarlos a cabo durante el desarrollo de la jornada escolar independiente a las demás propuestas en el plan de estudio. La capacidad creativa del docente como planificador y evaluador permitirá la inserción de estos en sus proyectos de aprendizajes y su relación con los demás para formar un todo. El eje Pensamiento Complejo se establece que está inmerso en la enseñanza de la geometría, como área desde la perspectiva de tendencias sencillas hasta estructuras cognitivas más complejas. La búsqueda y aplicabilidad de lo complejo en la consolidación del pensamiento geométrico generael conocimiento desde otras perspectivasy favorece la comprensión profunda de la realidad para constituir el conocimiento creando la reflexión del contexto y el pensamiento ininteligible con caracterizaciones superiores en su proceso de lucubración, muy conscientes de su entorno y responsables del sinnúmero de relaciones que se pudieran establecer cuando interactúan, entre lo que se aprende y la condiciones social del mismo.

En el eje formación docente para la enseñanza de la geometría en el nivel de Educación Primaria se concibe la necesidad de un docente con dimensión ética y con perfil académico caracterizado por la eficiencia, que le permite tomar conciencia de su gran rol como generador y moldeador de los aprendizajes que construyen sus estudiantes. Para ello, el docente debe, por iniciativa propia, estar en una constante reflexión de su formación, que le permita avanzar paralelamente en el conocimiento y profundizar cambios en el pensamiento con capacidad de orientar y enseñar con dimensión holística e incorporarlas a su trabajo diario.Es el propio docente quien debe preocuparse por evolucionar en conocimientos y desempeño en afán de adecuarse a nuevas tendencias sociales. En esencia final, se trata de garantizarun docenteque dé respuesta con las exigencias de la profesión, que se proyecte como líder del conocimiento,que garantice la solución a las problemáticas que enfrenta en la organización escolar física y didáctica, que haga de la realidad educativa, caracterizada totalmente por la incertidumbre, la singularidad y el conflicto de valores, en un servicio verdaderamente social, humanizado, dondese posibilite un análisis crítico de su quehacer formativo profesional en función de fortalecer la actividad que realiza en el contexto profesional.

En el eje Práctica Pedagógica se asume el conjunto de acciones, previamente planificadas, que se llevan a cabo en el contexto escolar con fines didácticos. En la didáctica de la geometría, la habilidad docente se establece en función de la enseñanza de una serie de contenidos eminentemente prácticos y de fácil aprehensión por el estudiante para convertirlos en aprendizajes significativos. Este proceso tiene implícito una serie de elementos que llevan al docente a iniciar un reconocimiento de su labor desde su pensamiento crítico, la incertidumbre que implica lo que hace, sus resultados y desde la complejidad del proceso para proyectarse con libertad de criterios, que se exprese en los diferentes planos del marco social donde se desempeña.En una práctica pedagógica acertada, donde se brinde las estrategias al estudiante para que construya gradualmente su aprendizaje, el docente debe identificar el enfoque pedagógico que rige su acción, las características del mismo junto con las exigencias que determinan su protagonismo en el escenario educativo.

d. Modelo didáctico para la enseñanza de la geometría en la educación primaria una aproximación teórica desde la perspectiva del pensamiento complejo

[21] señala que el modelo propuesto se compone de 4 ejes, interrelacionados entre sí, que permiten la reflexión crítica de la situación didáctica abordada con puntos de vista que contrastan una realidad encontrada con un ideal en el marco de una enseñanza de calidad. Estos ejes son: enseñanza de la geometría, pensamiento complejo, formación docente y práctica docente. En consecuencia, el eje enseñanza de la geometría plantea la necesidad de una didáctica aplicada con fines constructivista en el nivel de educación primaria que permita al estudiante, apoderarse del conocimiento con fines practico y relacionar el mismo con el infinito número de situaciones que pudiera enfrentar en su cotidianidad. El abordaje de la geometría en este nivel dimensiona el conocimiento del estudiante hacia el aprovechamiento de su cumulo experiencial como punto de partida para estructurar nuevos enfoques, nuevas cosas e ir emprendiendo pensamientos mejores estructurados, es decir, más complejos. La idealización de un modelo didáctico en geometría suponecambios en la rutina pedagógica vista en las aulas por un trabajo en equipo, que vaya desde lo disciplinario hasta lo transdisciplinario y que integre a cada uno de los miembros de las instituciones hacia un fin común.

Si se quiere enseñar geometría desde una perspectiva del pensamiento complejo, se debe considerar que no sólo implica ir a un aula o cualquier otro entorno de clase a impartir una serie de conocimientos, sino también se debeser conscientes de que en una clase no todo el mundo aprende a un mismo ritmo ni tiene el mismo tipo de aprendizaje, menos aún, tienen las mismas expectativas.En este mismo aspecto, existen estudiantes que presentan ciertas dificultades e intereses diferentes, y es necesario que se traten, y sobre todo, lo más fundamental es que el profesor debe ser un acceso de comunicación entre el estudiante y el conocimiento.También es importante dejar que participen activamente en el proceso, que se impliquen, que sean elementos del mismo, que creen curiosidad por aprender, por ir más lejos, por fijarse unos objetivos, por poder llegar a cumplirlos.

Como complemento a este eje se evidencia la práctica docente como componente de gran relevancia en la construcción de aprendizajes significativos hacia la complejidad y determinante para el éxito del trabajo escolar. La práctica docente permite prever los contenidos, adecuarlos a intereses de estudiante y darle un sentido lógico con fines de concatenar estructuras complejas en el pensamiento de cada uno; la práctica pedagógica debe estar sujeta a un proceso de reflexión crítica y profunda, donde cada uno reconozca, la contraste y la defina desde su introspectividad para dar paso a un trabajo diario flexible, humanizado y vivencial sustentado en las políticas educativas que propone el Estado. Allí el docente siempre actúa en un plano protagónico donde la renovación ideológica y programática será el norte de todas sus acciones.

La enseñanza de la geometría con una praxis docentehacia una perspectiva de lo complejo mantiene un paralelismo con los ejes formación docente y pensamiento complejo, entendidos estos como parte de un proceso multireferencial que se consolida en la medida en que el docente adquiere habilidades o destrezas para desempeñarse dentro de la enseñanza de geometría. La formación de un docente con vocaciónpara la dedicación a la enseñanza de geometría pudiera convertirse en una utopía si no se asume como verdadera política de Estado, producto de una comparación critica en cuanto a resultados que se generan en el modelo educativo actual.

Para esto, el Estado con toda su filosofía, asume la dimensión educativa sin la injerencia del quehacer político en la determinación de un posible perfil para el futuro docente a incorporarse en las aulas de clases. Con relación al pensamiento complejo, el modelo didáctico visiona la autorreflexión docente para despertar interés en la propuesta de Morín junto con otros autores, sobre la multifuncionalidad de lo aprendido y la necesidad de no localizar el conocimiento en un solo estadio mental sino relacionarlo con todas las partes de un todo.

Surge entonces la ruptura del viejo esquema que la teoría de la complejidad era sinónimo de lo difícil o lo complicado para dar paso al constructo de sistemas complejos, provenientes de todas las relaciones que un estudiante puede hacer con el conocimiento adquirido. Muy acertada es esta teoría para el sustento del modelo didáctico porque deviene de muchos principios de la teoría crítica y también, de la sociocritica al incentivar la sustitución de viejos paradigmas educativos por novedades en la adquisición gradual del conocimiento

Sin embargo, se ha hecho un recorrido histórico, de significación en importancia de la geometría en los capítulos anteriores y la geometría es una de las partes de las matemáticas que genera una particular preocupación en los educadores matemáticos dado su abandono como objeto de estudio en los currículos escolares desde la segunda mitad del siglo XX.

Esta situación se ve reflejada en las encuestas nacionales e internacionales que evalúan los conocimientos matemáticos de los estudiantes [24]. Actualmente existe en la comunidad matemática internacional una amplia convergencia de opinión en que la geometría, después de años de abandono, debiera ser revitalizada en sus variados aspectos en todos los niveles escolares [24]. No obstante, es utópico, y hasta cierto punto indeseable, pensar que la geometría ocupe ahora un tiempo análogo al que antaño se le dedicaba en las instituciones educativas, pues son muchos los objetos, propiedades y relaciones matemáticas sobre los que se ha de reflexionar. Pero eso no justifica que en la actualidad los tiempos asignados sean cada vez menores.

Síntomas de esta reducción se encuentran, por ejemplo, en los recientes encuestas nacionales e internacionales sobre el conocimiento matemático de los estudiantes. Con frecuencia la geometría es totalmente ignorada en ellas, o solamente se incluyen muy pocos items de geometría. En último caso, las preguntas tienden a ser confinadas a algunos "hechos" elementales sobre figuras simples y sus propiedades, y se reporta un desempeño relativamente pobre [24].

Entonces, ¿cómo hacer que la geometría ocupe un lugar importante en la enseñanza de las matemáticas? [29] señalan que investigaciones realizadas por [37], así como las del mismo autor [15] aportan elementos importantes para acercar respuestas tentativas a tal cuestionamiento. La visualización se constituye en un lugar de enorme potencia para devolver el lugar que le corresponde a la geometría en los currículos escolares. Pero, conociendo que, esta actividad cognitiva no se adquiere de forma inmediata ni simple; más bien es una cuestión de tratamiento de información susceptible de un aprendizaje específico.

Aibi revista de investigación, administración e ingeniería. Volumen 6, Número 1, Enero - Junio de 2018, ISSN 2346-030X PP 33-61.

Por ello, vale realizar un recorrido por las distintas formas de enseñanza de la geometría que existen y han sido aplicadas en los diferentes niveles y modalidades en educación tanto a nivel mundial, con a nivel nacional y regional.

e. Enseñanza de la Geometría en las Universidades

En diferentes países del mundo, la Geometría se encuentra dentro del currículo educativo como parte del área de matemática en el nivel de educación primaria y secundaria, debido a su importancia al ser una de las ramas más significativas de dicha área, así también está se encuentra inmersa como materia en los currículos a nivel universitario en algunas carreras como la matemática, ingeniería, arquitectura, educación, entre otros.

En este sentido, Geddes and Fortunato (1993, [41] expresa que en Tailandia la geometría ha tenido un lugar central en el currículo de matemáticas, siendo considerado como el contenido vital en las matemáticas que conecta con situaciones del mundo real (p. 252).

De esta manera, en dicho país se le da trascendental importancia al estudio de la geometría debido a que el aprendizaje de sus contenidos permite vincular al individuo con el mundo que los rodea. [41] expresa también que a pesar de los intentos y el trabajo de muchos estudiosos por la búsqueda de hacer que los estudiantes desarrollen un pensamiento geométrico, la enseñanza y el aprendizaje de la geometría no ha sido muy eficiente. (p.253), lo que significa que pese a la relevancia curricular dada a la geometría dentro de las matemáticas, no se están cumpliendo los objetivos de esta importante Rama matemática y por ende su estudio no se ha aprovechado al máximo.

Por otra parte, en cuanto a la enseñanza de la Geometría en España, [42] expone "La enseñanza de la geometría en la actualidad está en el olvido, a pesar de los esfuerzos que algunos grupos de profesores hacemos para mejorar la enseñanza de esta rama de la Matemática" (p.42), es decir, que el estudio de la Geometría en este país ha perdido importancia, sin embargo existen grupos de profesores que se dedican a rescatar y mejorar la enseñanza de esta valiosa área.

El mismo autor expresa que existe una mala preparación de los estudiantes que llegan a la universidad a estudiar carreras inmersas en el campo de la Educación, ya que estos carecen de algunos métodos propios del área como los razonamientos deductivo e inductivo y poseen unlenguaje geométrico caótico e inseguro, igualmente manifiesta que si bien los estudiantes ingresan a las universidades con conocimientos de geometría métrica, estos desconocen su fundamento y no poseen una visión global sobre esta. (p. 42-92).

Por otra parte, en Puerto Rico referente a la enseñanza de la Geometría, [43] expresa "En nuestra experiencia, como profesores de matemáticas, y más aún de futuros maestros de matemáticas de nivel intermedia, nos enfrentamos al problema que representa para los estudiantes futuros maestros de matemáticas el desarrollar la destreza de demostrar, y particularmente de hacer demostraciones geométricas que es un requisito para su desempeño profesional" (p.3)es decir, que en Puerto Rico la enseñanza de la Geometría a estudiantes de Educación Matemáticase encuentra marcada por la problemática a la que deben enfrentase los docentes debido a la debilidad que existe por parte de los estudiantes para hacer demostraciones geométricas, lo cual es indispensable para su posterior desarrollo profesional.

Igualmente el autor planeta que por consecuencia hay una evidente necesidad por parte de los futuros maestros de matemática de desarrollar la destreza para realizar estas demostraciones geométricas y un compromiso por parte de los docentes por enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las mismas (p. 4).

En Chile por su parte, [44] manifiestan: "La enseñanza de la geometría, salvo excepciones, no sólo en la región del Maule sino en Chile, ha hecho crisis dentro de la formación matemática, mostrando serias deficiencias." (p. 141). Lo anteriormente expuesto da una visión sobre el estado actual de la enseñanza de la Geometría en el mundo, se puede deducir que pese a que se toma en cuenta dentro de los sistemas curriculares universitarios y los esfuerzos de comunicadas universitarias para direccionar la misma, en la práctica existe debilidad y carencias, lo cual se refleja en las deficiencias de los estudiantes de educación media al ingresar a las universidades.

Con respecto a las dificultades presentadas por los estudiantes, Latorre (2004, citado por [44]) expresa:

"Varios son los estudios que justifican las razones de dichas dificultades, entre las que se destaca la forma en que ésta es enseñada en la formación de profesores, con un enfoque formal, sobrecargada de estructuralismo, de abstracción y parcelación del conocimiento. Se coloca en evidencia que esta forma de enseñanza, que adquieren los profesores, tiende a ser reproducida en las aulas, generando en los alumnos escasa comprensión de los conceptos y procesos geométricos (p.142)

Lo que significa que la forma de enseñanza recibida por los futuros profesores, es copiada y ejecutada en su posterior praxis docente, con lo cual se produce una especie de cadena donde los estudiantes de educación básica y media son enseñados de la misma forma y por tal no adquieren un aprendizaje geométrico eficiente lo que conlleva a universitarios con carencia de conocimientos en esta área. En este sentido, Vexliard, (1970, citado por [34]) expone "la geometría ha tenido una pérdida progresiva de su posición formativa en la enseñanza de la matemática en varios países del mundo; como consecuencia, "se debe revisar la formación de los docentes (de la primaria, secundaria y técnica), y por repercusiones sucesivas, reorganizar la enseñanza superior" (p.222).Se hace necesario resaltar dos aspectos señalados por este autor, el primero la necesidad de revisar la enseñanza en la educación superior, y segundo la pérdida de importancia de la Geometría dentro del área académica de las matemáticas en décadas pasadas y que aún sigue teniendo repercusiones, esta última responde a condiciones que [24]expresa más claramente:

Durante la segunda mitad de este siglo, la geometría parece tener una pérdida progresiva de su posición formativa central en la enseñanza de las matemáticas de la mayoría de los países. En el período desde aproximadamente 1960 hasta 1980, se dio una presión general en el currículo matemático contra tópicos tradicionales, debido a la introducción de otros nuevos (por ejemplo: probabilidad, estadística, ciencias computacionales, matemáticas discretas). Al mismo tiempo el número de horas escolares dedicadas a las matemáticas se fue abajo. El "movimiento de las matemáticas modernas" ha contribuido - al menos indirectamente - para disminuir el rol de la geometría euclideana favoreciendo otros aspectos de la matemática y otros puntos de vista para su enseñanza (por ejemplo: teoría de conjuntos, lógica, estructuras abstractas). La declinación ha involucrado en particular el rol de los aspectos visuales de la geometría tanto la tridimensional como la bidimensional, y todas aquellas partes que no encajaron dentro de la teoría de los espacios lineales como, por ejemplo, el estudio de las secciones cónicas y de otras curvas notables. En años más recientes ha habido un retorno hacia contenidos más tradicionales en matemáticas, con un énfasis específico sobre actividades de planteamiento y solución de problemas. De cualquier manera, los intentos de restablecer la geometría euclideana clásica - la que al principio y en muchas partes del mundo fue la materia principal en la geometría escolar - no han sido muy exitosos. El punto es que en los cursos tradicionales de geometría euclideana el material es usualmente presentado a los estudiantes como el producto final y ya hecho de la actividad matemática. Así, esta presentación, no encaja dentro del currículo actual donde se espera que los alumnos tomen una parte activa en el desarrollo de su conocimiento matemático (p. 25).

En cuanto a la enseñanza de la Geometría en Venezuela, [45] expresa que "la situación española no difiere mucho de lo que se nos presenta en Venezuela" (p. 3), y [34] expresaque la enseñanza de la matemática, en especial de la geometría, es concebida por los docentes como un conjunto de conocimientos cerrados, sistemático y riguroso, lo cual se debe muchas veces a la desaparición de la aplicación por parte del educador de ciertas estrategias y métodos que permitan proporcionar escenarios pertinentes para la aprehensión de los saberes geométricos vinculados con la realidad (p.221)

Finalmente, el Instituto Pedagógico Rural Gervasio Rubio (IPRGR) posee dentro de sus carreras Profesor Especialidad Matemática, en la cual se aspira que el docente de la especialidad Matemática:

Se forme con una visión holística de la Matemática, que conjugue elementos histórico-constructivos y formales, desarrolle su Potencial Matemático a través de la comprensión de las interrelaciones con otros sistemas, las estructuras Lógico-Matemáticas, el ingenio, la imaginación y la creatividad, su sentido crítico, investigativo y la argumentación de sus planteamientos a objeto de conformar una postura constructiva de la enseñanza de la Matemática. Se procura así, el logro de los atributos actitudinales y competencias establecidos en el perfil del egresado y, del nivel de eficacia y eficiencia del docente requerido por la nación con una visión actual y prospectiva. Los Objetivos de la Especialidad: Comprender la Matemática como una disciplina con sus características propias donde están presentes la inducción y la deducción, la particularización y la abstracción. Así mismo, entender la Matemática en su desarrollo histórico, cuyos principios y teorías han ido surgiendo de acuerdo a las exigencias tanto espirituales como materiales de las sociedades de las distintas épocas. Desarrollar habilidades y destrezas matemáticas en el manejo de axiomáticas, técnicas, esquemas de razonamiento válidos y principios y métodos propios de la teoría matemática, para garantizar el eficiente desempeño profesional del egresado. Desarrollar las habilidades y destrezas propias de las diversas disciplinas que integran el área Matemática, a fin de proporcionar la formación necesaria para la ejecución eficiente de los roles que el egresado desempeñara en el ejercicio de su función docente en esta área y su posición crítica ante la misma. Desarrollar a través de los métodos, técnicas y procedimientos propios de las disciplinas de la Matemática, un conjunto de estrategias orientadas al logro de experiencias de aprendizajes sistematizadoras y formalizadoras que favorezcan el dominio de los conocimientos de las diversas disciplinas y propicien una actitud positiva hacia la Matemática. Diseñar, desarrollar y evaluar situaciones didácticas y secuencias instruccionales relativas a los tópicos de los programas de Matemática de los niveles educativos en los cuales se desempeñara. Diseñar y participar en proyectos de investigación relativos a la Matemática y su enseñanza. Valorar la necesidad de formarse de un modo permanente en las áreas de la Matemática y de la Educación Matemática. Fomentar con sentido crítico el uso de recursos instruccionales tradicionales y no tradicionales en el campo de la Educación Matemática. Valorar el sentido profesional de su ocupación y fomentar su carácter asociativo entre todos los docentes de Matemática. Concebir la Matemática como una disciplina científica en armonía con otras disciplinas, al servicio del desarrollo de la sociedad.

Igualmente, posee su respectivo Plan de estudios el cual oferta progresivamente los cursos del área de Geometría.

f. Exigencias de la Enseñanza de la Geometría en la actualidad

A mediados de los años noventa, se empezó a escuchar un término denominado TIC (Tecnologías de Información y Comunicación), el cual fue el resultado de los avances en la informática, la electrónica y las telecomunicaciones. Duncombe & Heeks (1999, [39]) denominan a las TIC como:

El conjunto de procesos y productos derivados de las nuevas herramientas (hardware y software), soportes y canales de comunicación relacionados con el almacenamiento, procesamiento y transmisión digitalizados de la información, que permiten la adquisición, producción, tratamiento, comunicación, registro y presentación de informaciones, en forma de voz, imágenes y datos contenidos en señales de naturaleza acústica, óptica o electromagnética (p. 5).

La aparición de las TIC ha sido de gran importancia para la educación, debido a que puede enriquecer el proceso de enseñanza aprendizaje, aprovechando así las herramientas tecnológicas con las que se cuentan en la actualidad.

Ahora bien, dentro de la enseñanza de la matemática en nivel medio y superior es fundamental la utilización de procesadores geométricos para la enseñanza de esta disciplina. Este tipo de aplicaciones permite abordar la geometría desde una forma dinámica e interactiva que ayuda a los alumnos a visualizar contenidos matemáticos que son un poco más complicados de abordar desde un dibujo estático. El software libre también ha hecho aportes significativos en el desarrollo de este tipo de herramientas. Sin duda una de las más conocidas y que mezcla la funcionalidad de un procesador geométrico y algebraico, (Geometría-Álgebra), un software escrito en java muy fácil de usar y que resulta ser una poderosa herramienta en el proceso de enseñanza y aprendizaje en educación matemática, GeoGebra es un software de matemáticas que reúne geometría, algebra y calculo, desarrollado Markus LLohenwartre en la Universidad de Salzburgo para la enseñanza de matemática.

Por un lado, GeoGebra es un sistema de geometría dinámica que permite realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas como funciones que a posteriori pueden modificarse dinámicamente. Por otra parte, se pueden ingresar ecuaciones y coordenadas directamente. Así, GeoGebra tiene la potencia de manejarse con variables vinculadas a números, vectores y puntos; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático, para identificar puntos singulares de una función, como raíces o extremo.

Estas dos perspectivas caracterizan a GeoGebra: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa. De manera muy sencilla, se pueden construir figuras con puntos, segmentos, rectas, vectores, cónicas y también gráficas de funciones que pueden ser fácil y dinámicamente modificadas mediante el ratón. El programa también admite expresiones como: $g: 3x + 4y = 7$ o: $c: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ y ofrece una gama de comandos entre los que cabe destacar la derivación y la integración. Un obstáculo que se tenía en el aula para la comprensión del método de Fermat era la idea de que P se mueve hacia Q, Para vencer este obstáculo recurriremos al software GeoGebra, es un software gratuito de matemáticas que reúne geometría, álgebra y cálculo.

VI. CONCLUSIONES

Como inicio de estas conclusiones de cierre, es necesario señalar que esta monografía constituye uno de los estudios actualizados sobre la historia, definición, clasificación, aplicaciones y enseñanza de la geometría; diferenciándose en el sentido que abarca toda la teoría encontrada organizada y analizada según los objetivos planteados, de los cuales se puede concluir con las siguientes afirmaciones. Del primer objetivo Relatar la evolución histórica de la geometría, se puede destacar las siguientes conclusiones:

En la historia consultada y relatada acerca de la geometría se destaca el aporte significativo de los babilonios con la invención de la rueda del cual de la cual se descubrió las propiedades de la circunferencia, y encontraron las primeras indicaciones de medida, el sistema sexagesimal, y además determinaron métodos para calcular áreas de figuras planas sencillas. Completándose su aporte, por ser pioneros en estudiar Júpiter. En resumen, los conocimientos geométricos babilónicos tiene un rango Pre-científico con tendencia a la cuantificación, consecuencia lógica de la condición nómada de aquellos pueblos, cuyas urgencias biológicas eran más compatibles con la necesidad de contar que con la de medir, y así, por ejemplo, su unidad de medida de volumen no era el cubo de la unidad lineal, sino un ladrillo que tenía por base la unidad que utilizaban para medir superficies y por altura la unidad que empleaban para medir alturas, procedimiento híbrido que perturba el cálculo de volúmenes.

Los conocimientos geométricos en la India fueron considerados contemporáneos con los babilonios o derivados de ellos, como consecuencia del comercio entre ellos, el documento geométrico más antiguo es el “Sulva-Sutra” de Apastamba, el cual evolucionaba en perfecta sincronía con la religión, y contenía los manuales para la construcción de los altares destinados a sacrificios védicos. Los postulados del Sulva-Sutra están conectados con la división de figuras tales como líneas rectas, rectángulos, círculos triángulos.

De los Chinos se encuentran pocas referencias respecto a sus conocimientos geométricos en la primera civilización, pero el documento geométrico más antiguo es el “Tcheu-Pei” en el que se encuentra la propiedad característica de lados 3, 4 y 5 como fundamento del nivel que permite la medida de lo inaccesible: el cielo, del mismo modo que la agrimensura para la tierra.

Los egipcios fueron los primeros en dar el nombre a la parte de la matemática encargada de la medida de la tierra como geometría, tenían conocimientos avanzados logrados para dar solución tras los problemas que se les planteaban tras la inundación del río Nilo los linderos desaparecían y tenía que volver a marcar. Sus cálculos no eran abstractos tenían una aplicación práctica. Dominaron el tema delos triángulos gracias a los anudadores, y conocían la relación entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo.

En Grecia comienza la Geometría como ciencia deductiva, y los griegos perfeccionaron y aplicaron la geometría como una rama del saber. Los griegos más importantes por sus aportes a la geometría mencionados son: Fenicio Thales, con su Teorema de proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes, también conocía la propiedad de ser recto el ángulo inscrito en una semicircunferencia. Utilizó la circunferencia para la medida de ángulos, demostró la igualdad de los ángulos de la base de un triángulo isósceles, dio por evidente la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice. Anaximandro, inventor de los relojes de sol. Anaximandro de Clazomene con la cuadratura del círculo. Pitágoras con su teorema relativo a los triángulos rectángulos, También se les atribuye el descubrimiento de propiedades como la de ser el círculo y la esfera los cuerpos de mayor área y volumen de todos los de igual perímetro y superficie, respectivamente. Platón introdujo el método de análisis para la solución de problemas geométricos. Eudoxio de Cnido el discípulo más aventajado y querido de Platón, y a quien se deben entre otras, la demostración de los teoremas enunciados por Demócrito (460-370 a. de J.C.) sobre el volumen de la pirámide y del cono, la demostración sobre la proporcionalidad entre las áreas de los círculos y los cuadrados de sus diámetros, y sobre la génesis de la curva "hipopeda". Euclídes con su obra más conocida “Los Elementos” están divididos en trece libros: del I al IV tratan de la Geometría plana, el V de las proporciones, el VI de las magnitudes inconmensurables, del Vil al IX de la Aritmética de los números racionales, el X de la Aritmética de los números irracionales y del XI al XIII de la Geometría del espacio.

En la Edad Media, con la caída del Imperio Romano y la invasión árabe, hacia el año 641, desapareció, junto con su Biblioteca, la Escuela de Alejandría, comenzando una época gris para las Ciencias en general, y en la que, particularmente, la Geometría vivió un largo y profundo letargo de casi mil años de duración. Sin embargo, durante dicho milenio, aparecieron esporádicamente figuras como San Isidoro de Sevilla (560-636), en cuya enciclopedia hay una parte dedicada a la Geometría, el monje Gerberto (941-1.003), posteriormente Papa Silvestre II, que escribió un tratado de Geometría, en el cual se resuelve el problema de obtener los catetos de un triángulo rectángulo a partir de su área y de la hipotenusa. Durante el siglo IX, se puede hablar de la existencia de una Escuela de Bagdag que cultivó la Geometría, entre cuyos representantes están: Joarizmi (830) y Tabit (835-901) que resolvieron geométricamente las ecuaciones de segundo y tercer grado respectivamente. Albateni, que dio a la Trigonometría la forma simplificada actual. Abulguafa (933-998), que cultivó la Geometría de la regla y el compás. Alhazen (987-1.038), que determinó el volumen engendrado por la rotación de una parábola alrededor de su eje, y resolvió el problema de hallar el punto de un espejo cóncavo donde debe incidir un rayo luminoso para que el reflejado pase por un punto dado. Hacia el año 1.085, el judío catalán Svasorda escribió el "Libro del Tratado de la Medida y del Cálculo", excelente recopilación de Geometría euclídea, que plagió el italiano Fibonacci (1.175-1.250), incluidos los ejemplos numéricos. También italiano. Campano de Novara, en el siglo XIII, comentó y amplió la traducción latina que la Escuela de Traductores de Toledo había hecho de los "Elementos" de Euclides. Hacia el año 1.236, el alemán Jordano Nemorario inició una teoría sobre polígonos estrellados, completada por el inglés Tomás de Bradwardino (1.290-1.349).

Otros personajes dignos de mención, por sus aportaciones a la Geometría durante las últimas centurias de la Edad Media, son: Nicolás Oresme (1.323-1.382), francés, que dio los primeros pasos en la representación gráfica de funciones". Nicolás de Cusa (1.401-1.464), que creó un elegante método para rectificar un arco de circunferencia. Johann Müier, apodado Regiomontano (1.436-1.476), alemán, que tradujo y comentó las "Cónicas" de Apolonio. Lucas Paciol¡(1.445-1.514), que escribió una enciclopedia matemática muy difundida gracias a la imprenta inventada por Gutemberg.El Renacimiento de la Geometría. A finales del siglo XV y principios del XVI tuvo lugar el movimiento que se conoce como Renacimiento, Gracias a la posibilidad de leer las traducciones de las obras de Euclides, Arquímedes y Apolonio, durante este movimiento, se despertó una nueva curiosidad por la Geometría, la cual adquirió, después del lento proceso de una etapa de asimilación, el carácter abstracto y general aportado por sus estudiosos, fundamentalmente matemáticos.

Las nuevas geometrías: Geometría Analítica es una rama de la geometría que posee una importancia suprema en la evolución de la sociedad desde hace más de dos mil años y que también se puede trabajar con profundidad en la enseñanza media y universitaria. Geometría descriptiva la gramática del lenguaje gráfica, se le dio a la geometría descriptiva el carácter científico con su base geométrica. Geometría Proyectiva introdujo los conceptos de correspondencia directa e inversa, que utilizó para, mediante una única demostración, generalizar las propiedades geométricas de las figuras, independizándolas de las posiciones relativas de sus elementos constituyentes.

Las Geometrías No-Euclídeas no sólo supusieron una ruptura con un pasado geométrico de veintidós siglos, destruyendo la concepción kantiana^ del espacio y poniendo en duda por primera vez la coincidencia de la Geometría con la realidad, sino que además han sido instrumentos científicos de alto valor que han contribuido al avance de la Física teórica en diversos campos como el del átomo y el de las estrellas, e incluso en el descubrimiento de la teoría de la relatividad. La Geometría no-euclídea, como rama de la Geometría, también es ciencia que estudia el espacio exterior al individuo; aunque en dicho estudio sigue un proceso distinto al de la Geometría euclídea. Así, mientras que ésta lo hace a partir de la observación de un espacio físico, y a través de la abstracción sistemática de las propiedades físicas de los cuerpos crea un espacio intuitivo que identifica con el de partida, la Geometría no-euclídea separa el espacio físico del intuitivo, creando en su lugar un espacio abstracto que, independizándolo de toda observación sensorial, lo fundamenta sobre una base lógica, mediante procesos racionales aplicados a los principios más sencillos posibles.

Las Geometrías contemporáneas con Riemann parecía haberse dado por concluida la revisión crítica de los "Elementos" de Euclides, hasta que el alemán Félix Klein (1.849-1.925) retoma dicha revisión extendiéndola al resto de las hipótesis básicas de la Geometría euclídea. Klein fundó el Instituto de Matemática Aplicada, desarrollando en él una gran labor docente de notable influencia en el resto de los círculos pedagógicos. En su obra "Programa de Erlangen" unificó la diversidad de resultados que se obtuvieron en las investigaciones llevadas a cabo hasta entonces sobre los postulados de Euclides, apoyándose para ello en la teoría de grupos de transformaciones de contacto desarrollada por el noruego Sophus Lie (1.842-1.899) en un tratado compuesto por tres volúmenes De esta forma, dio una nueva orientación a la Geometría, definiéndola como elestudio del conjunto de propiedades de las figuras de un espacio de cualquier número de dimensiones que permanecen invariantes frente a los distintos grupos de transformaciones que se puedan definir en él, de lo cual resulta, como se expondrá más adelante, una perfecta y elegante clasificación de los tipos de Geometría, basada en los distintos tipos de grupos de transformaciones.

Los trabajos de Klein también se extendieron a la Geometría noeuclídea, a la que dividió en Geometría Elíptica, correspondiente a la desarrollada por Riemann sobre la hipótesis del ángulo obtuso, y Geometría Hiperbólica, correspondiente a la desarrollada por Lobatschewski y Boiyai sobre la hipótesis del ángulo agudo, y para la que propuso un modelo alternativo al de Beltrami.Todas estas inquietudes surgidas durante la segunda mitad del siglo XIX y principios del XX respecto a la Geometría euclídea, condujeron a la tarea de construir una Geometría sobre unas bases lógicas sólidas, partiendoexclusivamente de postulados que satisficieran las condiciones de: independencia o irreductibilidad, para no convertir un postulado en un teorema; compatibilidad; sencillez y adaptabilidad a las relaciones más elementales del espacio intuitivo, con el fin de que la Geometría fuera una ciencia aplicable a las necesidades de la vida ordinaria sin que perdiera su carácter abstracto independiente del mundo objetivo.

Seguidamente, se mencionan las conclusiones del segundo objetivo denominado Conceptualizar la geometría, agregando en ella la clasificación y aplicaciones en la vida.

La geometría es una de las ciencias más antiguas que existen en la actualidad pues sus orígenes ya se han establecido en lo que era el Antiguo Egipto. Así, gracias a los trabajos de importantes figuras como Euclides o Pitágoras, mencionados en la parte anterior, se ha sabido que desde tiempos inmemoriales aquella estaba muy desarrollada pues era fundamental para el estudio de áreas, volúmenes y longitudes.

El origen de la palabra proviene de los vocablos griegos geo (tierra) y metría (medir), “la medición de la tierra”; Efectivamente, al buscar el concepto de Geometría en el Diccionario web de la Real Academia Española [18] (2017), se encuentra:del lat. geometrĭa, y este del gr. γεωμετρία. 1. f. Estudio de las propiedades y de las medidas de las figuras en el plano o en el espacio. γεωμετρία es una palabra compuesta de γεω, tierra; y de μετρώ, medida.

En su forma más elemental, la geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área, perímetro y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos. Es decir, la geometría es la parte de las matemáticas que trata de las propiedades y medida del espacio o del plano, fundamentalmente se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos o geométricos.

Su gran utilidad e importancia que deriva de esta Ciencia Formal radica en la gran variedad de aplicaciones, siendo auxiliar de una significativa cantidad de ciencias, por cuanto se ocupa de analizar las Formas de las Cosas, para posteriormente realizar una medición de cada una de sus características y cualidades, teniendo distintas convenciones de realizarse e inclusive los más variados instrumentales, donde seguramente utilizan básicamente el Compás para poder realizar y mensurar figuras circulares perfectas, como también la Regla, entre otros materiales didácticos. Los campos de aplicación de la geometría abarcan una gran variedad desde crear diseños industriales, dibujos artísticos pasando por su aplicación en arquitectura e ingenierías, y en astronomía, medicina, en física aplicada, mecánica, geografía, náutica, topografía, balística y es útil en la preparación de diseños: gráfico, ambiental, de ropa o joyería, la publicidad de una marca, la imagen de una empresa, la creación de artículos son los que le dan vida al comercio y a la economía. La geometría se centra en las propiedades del espacio y las figuras. Simplifica el cálculo de área, perímetro y volumen. También ayuda a las personas a comprender los objetos espacialmente, conceptualizando cómo la posición, el tamaño y la forma de un espacio se relacionan con las cosas dentro de ese espacio.

En la actualidad, la geometría incluye tal diversidad de aspectos, que no hay esperanza de escribir una lista completa de ellos; sin embargo, se mencionan: la geometría como una herramienta para describir y medir figuras, la geometría euclidiana, afín, descriptiva y proyectiva, así como también topología o geometrías no euclidianas y combinatorias. La Geometría como un método para las representaciones visuales de conceptos y procesos de otras áreas en matemáticas y en otras ciencias; La Geometría como un punto de encuentro entre matemáticas como una teoría y matemáticas como una fuente de modelos. La Geometría como una manera de pensar y entender y, en un nivel más alto, como una teoría formal. La Geometría como un ejemplo paradigmático para la enseñanza del razonamiento deductivo. La Geometría como una herramienta en aplicaciones, tanto tradicionales como innovativas. Estas últimas incluyen por ejemplo, gráficas por computadora, procesamiento y manipulación de imágenes, reconocimiento de patrones, robótica, investigación de operaciones.

La geometría es una disciplina muy amplia dentro de las matemáticas, que se divide según los estudios de cada especialidad o tipo de geometría. A pesar de que existen unos 49 tipos de geometría, estos son los principales tipos de geometría: Geometría euclidiana. Geometría plana. Geometría espacial Geometría no euclidiana. Geometría riemanniana. Geometría analítica. Geometría diferencial: Geometría proyectiva: Geometría de incidencia: Geometría de dimensiones bajas. Geometría algebraica. Geometría clásica: Geometría diferencial de curvas y superficies Geometría diferencial de curvas: Geometría diferencial de híper-superficies. Geometría diferencial de superficies. Geometría diferencial de variedades. Geometría diferencial discreta. Geometría absoluta. Geometría afín. Geometría computacional. Geometría constructiva de sólidos. Geometría conforme. Geometría convexa. Geometría discreta. Geometría esférica. Geometría finita. Geometría fractal. Geometría hiperbólica. Geometría molecular. Geometría molecular angular. Geometría molecular bi-piramidal pentagonal. Geometría molecular bi-piramidal trigonal. Geometría molecular cuadrada plana. Geometría molecular de balancín. Geometría molecular en forma de T.

La dinámica evolutiva de la geometría permite concluir que si bien ésta ha adquirido el estatus de disciplina científica, se encuentra íntimamente relacionada con la percepción espacial y en esta halla su fuente de significado, bien sea para afinarla o para superarla. Los avances en geometría no provienen únicamente de las investigaciones en matemáticas, sino que tienen una gran variedad de fuentes: las artes, los oficios, la técnica, las ciencias. Este hecho destaca el carácter vivo de la geometría y su riqueza cultural. El renacer de los aspectos visuales, gracias al potencial de los recursos informáticos, ha puesto en equilibrio los procesos de visualización y los procesos de justificación que permiten trabajar en geometría significativamente. Así es como en la actualidad se reconoce la imposibilidad de independizar los dos polos de la actividad geométrica, y se resalta más bien su mutua dependencia y su complementariedad.

Respecto a las aplicaciones se presentan algunas de las aplicaciones en áreas de la ciencia trascendentes: La Geometría de los seres vivos y su importancia en la medicina; La Arquitectura y la geometría son dos disciplinas virtualmente inseparables, excepto por una diferencia: la Geometría puede existir sin la Arquitectura, pero la Arquitectura no puede existir sin la geometría. Es necesario analizar el espacio, conocerlo a fondo y organizarlo en forma inteligente. La aplicación de la geometría analítica en la rama de la ingeniería civil (estructuras) es con la finalidad de conseguir estructuras funcionales que resulten adecuadas desde el punto de vista de la resistencia de materiales.

Finalmente, del objetivo tres, Reseñar algunos modelos de enseñanza de la geometría y la experiencia en instituciones de educación universitaria se concluye que La enseñanza de la geometría es indispensable para la construcción, explicación y comprensión del espacio, y se incluye en los currículos del mundo en los diferentes niveles educativos como una de las áreas de las matemáticas.

La enseñanza de la geometría, debe ir encaminada a la resolución de problemas y poseer relación con el entorno físico, para la construcción de aprendizaje afectivo.

Existen diferentes modelos que orientan la enseñanza de la geometría, en los cuales se resalta el Duval que presenta tres niveles cognitivos para la construcción geométrica (visualización, razonamiento, construcción), el Van Hile que presenta cinco niveles de razonamiento Geométrico, (Visualización o reconocimiento, análisis, Ordenación o clasificación, Deducción formal, Rigor), ambos conforman una importante guía en la conducción del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

Igualmente también existen otros modelos de enseñanza como el de Uzcategui con su modelo didáctico para la enseñanza de la Geometría en la educación básica, donde presenta cuatro ejes relacionados entre sí que actúan dentro del proceso de enseñanza de la geometría, (pensamiento complejo, formación docente y práctica docente) y que deben ser tomados en cuenta para la ejecución didáctica de dicha área.

La enseñanza de la Geometría ha tenido un similar comportamiento en las diferentes partes del mundo, donde se observan deficiencias, las cuales son evidencian en los resultados de pruebas aplicadas a los estudiantes de secundaria ya quienes ingresan a las universidades, estos resultadosmuestran que los estudiantes no están desarrollado un pensamiento geométrico eficiente y que por ende los profesores de esta área no se están preparando de la manera más apropiada para la ejecución de su praxis pedagógica.

Por otra parte, la Geometría y su forma de enseñanza perdieron en la segunda mitad del siglo XX relevancia dentro de los currículos educativos del área de matemática lo cual es una de las causas de la problemática mencionada en el párrafo anterior.Pese a lo expuesto, se puede decir que en la actualidad la enseñanza de la Geometría posee un papel protagónico en los aprendizajes matemáticos y está inserta en diferentes carreras universitarias relacionadas con la educación, ingeniería, arquitectura, entre otra.Así también, vale la pena acotar que la enseñanza geométrica no solo es útil para el desenvolvimiento profesional sino que es necesario para la elaboración de tareas cotidianas.

VII. RECOMENDACIONES

Ante esta realidad, se recomienda tener presente que el desarrollo de los programas de geometría se recontextualicen, mediante situaciones concretas, que sirvan de ejemplo y demostraciones, con los cuales el estudiante pueda investigar, analizar, confrontar, comparar, deducir e inferir. De lo que se trata es que en las aulas de clases, se plantee una perspectiva, con manejo y dominio del conocimiento teórico, para realizar con eficiencia la aplicabilidad en la práctica.

De acuerdo a [44], el objetivo de un buen proceso didáctico estratégico es poner en marcha de forma consciente y constructiva un conjunto de habilidades, tanto cognitivas, como de apoyo al aprendizaje. Este proceso debe activar los contenidos previos que permitirán sustentar las nuevas informaciones y estructurar dicha información de manera comprensiva. Para el desarrollo los objetivos terminales de cada sesión de trabajo. Es indispensable, estimular la capacidad de comprensión, que se basa en tres habilidades básicas: seleccionar, relacionar y concretar los contenidos informativos. Es necesario combinar dichas habilidades con un tratamiento procedimental, tanto individual, como de conjunto.

Es plantearse un proceso de enseñanza-aprendizaje que posibilite al estudiante a los alumnos el poder realizar enfoque profundo de cada tema, que da cuenta de la intención de comprender el significado de los contenidos que se imparten, e integrarlos en las estructuras intelectuales personales. Este enfoque se opone al enfoque superficial, en el que la implicación personal del estudiante es muy escasa y los contenidos se memorizan de manera mecánica. Teniendo siempre en cuenta que para alcanzar los niveles superiores hay que enfatizar y avanzar en los niveles inferiores.

VIII. REFERENCIAS

[1] F. Zambrano, E. Trujillo y C. S. Solórzano, «Desarrollo rural sostenible: Una necesidad para la seguridad agroalimentaria en Venezuela,» *AiBi revista de investigación en administración e ingeniería,* vol. 3, nº 1, 2015.

[2] J. C. García-Duarte, «Educar en las TIC´S a niños en situación de pobreza,» *AiBi revista de investigación en administración e ingeniería,* vol. 3, nº 1, 2015.

[3] Z. Rangel-Toloza, «La gerencia investigativa universitaria desde la perspectiva de las universidades y organismos de investigación venezolanos,» *AiBi revista de investigación en administración e ingeniería,* vol. 4, nº 1, 2016.

[4] J. Furguerle, B. Villegas y Z. Daboín, «Las TICs y el perfil del docente para el desarrollo de actividades didácticas,» *AiBi revista de investigación en administración e ingeniería,* vol. 4, nº 1, 2016.

[5] Harvard, « La Toma de babilonia,,» *Isor,* vol. 4, nº 14, pp. 117- 123, 2003.

[6] M. Martínez, «Antecedentes históricos de la geometría.,» 2013.

[7] J. Salazar y J. Rojas, Geometría., U. P. E. Libertador., Ed., Venezuela: FEDUPEL. Serie Azul., 2005.

[8] M. Ossendrijver, «Ancient Babylonian astronomers calculated Jupiter's position from the area under a time-velocity graph,» 2016.

[9] L. Portillo, «Cultura India – Hindu.,» 2010.

[10] L. Méndez, «Análisis de los conocimientos geométricos preuniversitarios y su influencia en la formación de los alumnos de las escuelas técnicas.,» 1996.

[11] C. Suárez, «Orígenes y representantes de la geometría.,» 2016.

[12] F. Herrera y P. I., «Las matemáticas en Egipto.,» 2017.

[13] A. Gutiérrez, «Historia de la geometría euclidiana.,» 2012.

[14] F. Casanova, J. Madriaga y J. Gálvez, «Geometría Analítica. Algo de Historia.,» 2010.

[15] O. Avila T., «Historia de la Geometría Descriptiva.,» *Revista Científica Revista Científica de la UPAP.,* 2017.

[16] J. Ruiz M., «Origenes y Nacimiento de la Geometría Proyectiva.,» 2011.

[17] J. C. Pérez, «Acerca de la Geometría de Lobachevsky.,» 2014.

[18] Real Academia española , «Diccionario de la Lengua Española (22ª. Ed.),» 2001.

[19] Diccionario ABC, «Concepto de Geometría.,» 2017.

[20] J. Arteaga, «Una relación entre la geometría y el álgebra (programa de Erlangen).,» *Tecné, Episteme y Didaxis: TED,* vol. 32, pp. 143-148, 2012.

[21] X. Uzcátegui, «Modelo Didáctico para la Enseñanza de la Geometría en Educación Primaria. Una aproximación teórica desde la perspectiva del pensamiento complejo.,» 2017.

[22] J. Flores, «Exploración del impacto de un software dinámico en el aprendizaje de la geometría.,» Tegucigalpa, México., 2010.

[23] R. Báez y M. Iglesias, «Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL. "El Mácaro",» *Revista Enseñanza de la Matemática,* pp. 67-87. .

[24] V. Villani, «Perspectivas sobre la enseñanza de la geometría para el siglo XXI,» Pisa, Italia , 2001.

[25] L. Canals, Mauricio y R. Solis, «Geometría de los sistemas vivos y su importancia en Medicina.,» *Rev. méd. Chile,* vol. 133, nº 9, pp. 1097-1107, 2005.

[26] M. Sánchez, Geometría sin esfuerzo., España: Ates Gráficas Grijelmo, S.A. Bilbao., 1983.

[27] L. Camargo y A. M., «La geometría, su enseñanza y su aprendizaje,» *Rev. Fac. Cienc. Tecnol.,* nº 32, pp. 4-8, 2012.

[28] J. Shortino, «¿Que tan importante es la geometría en la arquitectura?,» 2014.

[29] P. Castro, «Geometría. Aplicación a la Ingeniería Civil.,» 2013.

[30] G. Pawel Rokicki, T. Krzysztof Kubiak, B. Malgorzata Zaborniak, L. Jacek Bernaczek y N. Andrzej, «La evaluación de la precisión geométrica de las palas de los motores de aeronaves con el uso de un escáner de coordenadas ópticas,» *Ingeniería aeronáutica y tecnología aeroespacial: un diario internacional,* vol. 88, nº 3, pp. 374-381, 2016.

[31] G. Aad, R. Wolfgang y K. Martin., «Geometry with Applications and Proofs : Advanced Geometry for Senior High School, Student Text and Background Information.,» *Published by: Sense Publishers,P.O.,* 2014.

[32] G. Vargas y Gamboa, «El Modelo De Van Hiele y La Enseñanza de la Geometría,» *UNICIENCIA* , vol. 27, nº 1, pp. 74- 94, 2013.

[33] S. Peña y O. López, «La enseñanza de la Geometría" Instituto Nacional Para La Evaluación De La Educación,» 2008.

[34] M. Ferreira, «Episteme De La Geometría Derivado De La Enseñanza A Través De Los Entornos Inteligentes Y Las Redes De Información,» Venezuela, 2013.

[35] B. Joyce y M. Weil, «Los modelos de enseñanza,» 1985.

[36] N. Martínez, «Los Modelos de Enseñanza y la Práctica en el aula,» *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativ,* vol. 16, nº 2, pp. 139- 178, 2004.

[37] R. Duval, «La Geometría desde un Punto de Vista Cognitivo,» *PMME-UNISON,* 2001.

[38] V. Hernández y M. Villalba, «Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI. Documento de discusión para estudio ICMI,» 2001.

[39] R. Goncalves, «Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en geometría,» *Revista de Ciencias de la Educación,* vol. 27, pp. 84-98, 2006.

[40] A. Jaime, «Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano. La Evaluación del nivel de razonamiento,» España, 1993.

[41] L. Shafia Abdul Rahman, «Lesson study incorporating phase-based instruction using Geometer's Sketchpad and its effects on Thai students' geometric thinking,» *International Journal for Lesson and Learning Studies,* vol. 3, nº 3, 2014.

[42] J. Sordo, «Estudio de una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologías para la enseñanza de la geometría dinámica" tesis doctoral. Madrid. Universidad Complutense de Madrid facultad de educación,» 2005.

[43] O. Quintero, «Un modelo pedagógico de enseñanza de la geometría euclidian" Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación,» 2014.

[44] M. Aravena y C. Caamaño, «Niveles de Razonamiento Geométrico en Estudiantes de Establecimientos Municipalizados de la Región del Maule,» *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* vol. 16, nº 2, pp. 139-178, 2013.

[45] V. J., «Didáctica de la Geometría. Guía instruccional.,» 2017.