07

2019

NOTAS DE CLASE

Apropiación social del conocimiento
Generación de contenidos impresos
http://repository.ucc.edu.co/handle/20.500.12494/7375
N.° 07, noviembre de 2019
doi: https://doi.org/10.16925/gcnc.10

NOTAS SOBRE FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Alberto Gómez Lozano
Universidad Cooperativa de Colombia
Sede Ibagué-El Espinal

EDICIONES
Universidad Cooperativa de Colombia

Acerca del autor

Alberto Gómez-Lozano, magíster en Ciencias de la Educación con Mención en Docencia e Investigación Universitaria, profesor asistente del programa de Ingeniería Civil, Universidad Cooperativa de Colombia, sede Ibagué-El Espinal, Colombia.

Correo electrónico: alberto.gomez@campusucc.edu.co

CvLAC: https://scienti.colciencias.gov.co/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod_rh=0000497711

Cómo citar este documento

Gómez-Lozano, A. (2019). *Notas sobre fundamentos matemáticos*. (Generación de contenidos impresos N.° 7). Bogotá: Ediciones Universidad Cooperativa de Colombia. Doi: https://doi.org/10.16925/gcnc.10

TABLA DE CONTENIDO

07 NOTAS SOBRE FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Alberto Gómez Lozano

RESUMEN

Medir y contar, probablemente, fueron las primeras actividades de tipo matemático que realizó el hombre. Se necesitaron muchos siglos para que este estableciera un concepto abstracto de número. Los dedos fueron, para nuestros antepasados, los primeros instrumentos de cálculo, como actualmente continúan siendo para los niños. Posteriormente, se da origen al álgebra que es la combinación de las letras y los signos para realizar diferentes operaciones aritméticas. Contar elementos y medir distancias fueron las primeras actividades relacionadas con las matemáticas que realizaron nuestros ancestros. Los hombres primitivos hacían marcas en los árboles o en las rocas, con las cuales medían el tiempo o contaban los animales que tuvieran. De esta manera, surge la aritmética. El concepto abstracto de número vino mucho tiempo después, siendo este la base para formar el álgebra como ciencia. El objetivo de la presente nota de clase es facilitar el estudio de los conceptos básicos y necesarios de los fundamentos matemáticos, paso a paso, de una manera clara, sencilla y con diferentes ejemplos. Esta nota de clase inicia con números racionales, los cuales permiten realizar, entre sus elementos, las operaciones de suma, resta, multiplicación y división; le siguen razones y proporciones, potenciación y radicación, álgebra básica y ecuaciones lineales y cuadráticas. No obstante, el presente documento sirve para resolver problemas básicos y tener las bases matemáticas para desarrollar situaciones complejas durante la carrera de Ingeniería y la práctica profesional.

Palabras claves: álgebra básica, ecuaciones lineales y cuadráticas, fundamentos matemáticos, números racionales, potenciación y radicación, razones y proporciones.

Introducción

El presente documento está dirigido especialmente a los estudiantes de Ingeniería para fundamentar y afianzar los conceptos básicos de matemáticas desde los números racionales —que permiten realizar, entre sus elementos, las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, razones y proporciones, potenciación y radicación, álgebra básica y ecuaciones lineales y cuadráticas—. El objetivo es reforzar los conceptos de una manera sencilla y concreta, así como afianzar el dominio adecuado de un conjunto de habilidades y destrezas necesarias para resolver situaciones complejas durante la carrera de Ingeniería y su labor profesional.

Igualmente, las matemáticas se aprenden entendiendo y practicando los conceptos más rigurosos y esenciales. Para ello, al final de cada capítulo, se proponen actividades para ayudar al estudiante a dominar las técnicas de solución de problemas y la aplicación de estas técnicas a problemas reales de la Ingeniería.

La metodología utilizada lleva al estudiante paso a paso, de una manera clara, sencilla, con ejemplos, cuidadosamente escogidos para ayudar a afianzar sus conocimientos.

OBJETIVO GENERAL

Proporcionar al estudiante los elementos básicos, los conceptos, las reglas y las técnicas para realizar entre sus elementos las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación, álgebra básica, ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas.

1. Números racionales

1.1 PREFACIO

En este capítulo, trabajaremos fracciones en las que el numerador y el denominador son números enteros, es decir, son de la forma $\frac{m}{n}$, donde m y n son números enteros, y realizaremos las operaciones de suma, resta, multiplicación y división entre sus elementos.

Los egipcios pensaban únicamente en fracciones unitarias, en las que el numerador era 1 y las representaban con el signo oval encima del número, descomponiendo en otras fracciones (Figura 1).

Por ejemplo:

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \text{ ó } \frac{10}{27} = \frac{1}{3} + \frac{1}{27}$$

Su notación era la siguiente:

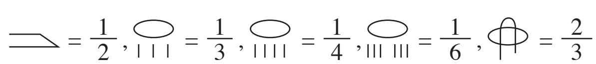

FIGURA 1. Fracciones egipcias. Tomado de Manosalva (2017).

Según Soto Apolinar (2011), los números racionales se definen como "el conjunto de todos los números que se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, donde el denominador es distinto de cero.

$$Q = \left\{ x = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0 \right\}$$

Todos los números enteros y todonales" (p.111).

Los números racionales se utilizan para formular medidas, porque comparan una cantidad con la unidad y su resultado es una fracción.

$$Q = \{ \frac{a}{b} \ / \ a \in Z; \ b \in \in Z; \ b \neq 0 \ \}$$

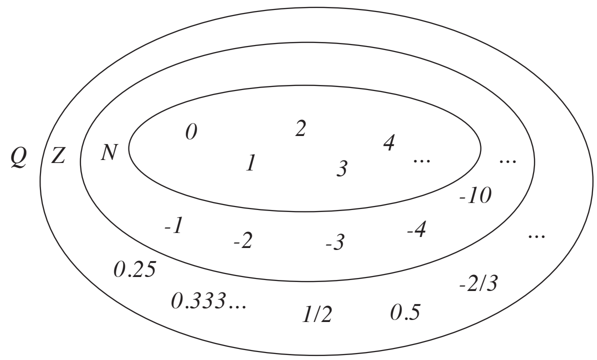

FIGURA 2. Sistema numérico. Elaboración propia.

A continuación, se dará una explicación de las operaciones con números racionales.

1.2 OPERACIONES CON FRACCIONES

1.2.1 Número fraccionario

Definición. Es la razón entre dos números enteros, a y b, tal como se muestra a continuación:

$\dfrac{a}{b}$ con a,b dos números enteros; a es el numerador y b es el denominador

Clases de fraccionarios:

- *Fraccionarios homogéneos:* son los que tienen el mismo denominador; por ejemplo: $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}$
- *Fraccionarios heterogéneos:* son los que tienen diferente denominador; por ejemplo: $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{7}{9}$

1.2.2 Operaciones entre fraccionarios

Suma algebraica de fraccionarios homogéneos: en este caso, se suman los numeradores y el denominador es el mismo; por ejemplo:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-\frac{10}{3}=\frac{2+5-10}{3}=\frac{-3}{3}=-1$$

Suma algebraica de fraccionarios heterogéneos: primero, daremos una definición que va a ser de mucha importancia.

El *mínimo común denominador* es el mismo mínimo común múltiplo (MCM), que es escoger el múltiplo más pequeño entre los denominadores. Por ejemplo:

Hallar el MCM entre 4, 6, 12. Para hallar el MCM, citaremos dos métodos.

- Método 1: se sacan los múltiplos de los números, como lo veremos a continuación:

Múltiplos de 5 = {5,10,15,20,...}

Múltiplos de 7 = {7,14,21,28,...}

Múltiplos de 12= {12, 24, 36, ...}

Si observamos el menor número en común entre los tres conjuntos es 12; por tanto, el MCM de 4, 6, 12 es el 12.

- Método 2: descomposición en factores primos. Primero, descomponemos cada uno de los denominadores en factores primos.

$$\begin{array}{c|c} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Luego, escogemos el número primo que más se repita en cada descomposición y, finalmente, se multiplican estos números encontrando el MCM.

MCM = 2 x 2 x 3 = 12

Ahora, ya estudiando cómo encontrar el MCM, nos concentraremos en la suma de fracciones heterogéneas. Para realizar esta suma, primero encontramos el MCM de todos los denominadores, como lo veremos en el siguiente caso:

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{12}$$

Como ya vimos, el MCM de los denominadores es igual a 12, el cual va a ser el denominador del término resultante de la suma; luego, el MCM lo dividimos entre cada uno de los denominadores. Este resultado lo multiplicamos por cada numerador teniendo como resultado el siguiente:

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{12}=\frac{(1.3)+(5.2)-(7.1)}{12}$$

Para finalizar, se resuelven los productos y luego se realizan las operaciones en el numerador.

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{12} = \frac{3+10-7}{12} = \frac{6}{12}$$

Vale la pena anotar que la respuesta siempre se debe simplificar, con lo que tendríamos:

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{12}=\frac{1}{2}$$

Producto de fraccionarios: para multiplicar fraccionarios, lo primero que debemos hacer es el producto de sus signos. Se multiplican entre sí los numeradores y este resultado corresponde al numerador de la nueva fracción; lo mismo se hace entre los denominadores, obteniendo el nuevo denominador. Veremos el desarrollo del proceso para el caso general:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Ahora veremos un ejemplo:

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

División de fraccionarios: para dividir dos fraccionarios, lo que hacemos es invertir el segundo fraccionario, con lo que quedaría el numerador como denominador y el denominador como numerador, y realizamos un producto entre el primer fraccionario y el nuevo resultante de invertir el segundo.

Ejemplo:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

$$\frac{4}{5}\div\frac{3}{2}=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$$

Tenga en cuenta la siguiente observación: la división entre fraccionarios se puede realizar por la ley fundamental de las proporciones (ley de la oreja).

$$\left[\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\right]=\frac{ad}{bc}$$

Nota. Después de realizar cualquiera de las operaciones anteriores, se debe simplificar el resultado hasta su mínima expresión.

1.3 POTENCIACIÓN

La potencia n de un número racional se halla elevando tanto el numerador como el denominador a la potencia n, teniendo en cuenta las leyes de los signos. Por ejemplo:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16} \qquad \left(-\frac{3}{4}\right)^3=-\frac{3^3}{4^3}=-\frac{27}{64}$$

1.4 RADICACIÓN

La raíz enésima de número racional se halla sacando la raíz enésima tanto del numerador como el denominador. Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$$

Actividad:

1. La tercera parte de la tercera parte de 270 es:

   a. 90

   b. 60

   c. 30

   d. 120

2. De lo que tenía, gasté la mitad, y la cuarta parte del resto lo presté. Me quedan $80. ¿Cuánto tenía inicialmente?

a. $320

b. $200

c. $160

d. $120

3. De lo que tenía, gasté la cuarta parte, y de lo que me quedó, gané la mitad. Ahora tengo $720: ¿Cuánto tenía inicialmente?

a. $860

b. $760

c. $640

d. $540

1.5 CONCLUSIÓN

La habilidad para manipular las fracciones ayuda a repartir los pagos, el presupuesto diario en una obra civil, las cantidades de obra, la cantidad de datos en un día que se pueden relacionar en un aplicativo, entre otros, siempre partiendo de la unidad.

1.6 REFERENCIAS

Cuéllar-Carvajal, J. A. (2013). *Matemáticas I*. México D. F.: McGraw Hill.

Manosalva, N. G. (2017). *Las fracciones egipcias como herramienta didáctica para resolver ecuaciones que involucran fracciones*. Recuperado el 19 de abril de 2019, de http://bdigital.unal.edu.co/57091/7/NancyGonz%C3%A1lezManosalva.2017.pdf

Soto Apolinar, E. (2011). *Diccionario ilustrado de conceptos matemáticos*. México D.F.: s. l. (libro de distribución gratuita). Recuperado el 18 de abril de 2019, de http://wordpress.colegio-arcangel.com/matematicas/files/2012/10/DICM.pdf

2. Razones y proporciones

2.1 PREFACIO

En este capítulo, nos dedicaremos a explicar y a definir las razones y las proporciones utilizadas para comparar cantidades o establecer la relación que debe existir entre dos cantidades y que nos permiten resolver diversos problemas en los que se establecen relaciones entre magnitudes.

2.2 RAZONES

Una razón es la relación o el cociente indicado entre dos magnitudes. Si a y b son las magnitudes que se van a comparar, entonces la razón se escribe $a{:}b$, o $\frac{a}{b}$, y se lee *a es a b*.

En la razón $a{:}b$, la magnitud a se llama *antecedente* y la magnitud b, *consecuente*, tal como se muestra a continuación:

$$Razón = \frac{a}{b}\begin{matrix} antecedente \\ consecuente \end{matrix}$$

Actividad:

1. Si el perímetro de un cuadrado es igual a $4L$, donde L es la medida del lado del cuadrado:

   a. Entre el lado y el perímetro, ¿cuál es la razón?

   b. ¿Cuál es la razón entre el lado y el nuevo perímetro si cada lado se multiplica por dos?

   c. Haga lo mismo con otro polígono y saque una conclusión de la razón entre el lado y el perímetro.

   d. Halle la razón entre el lado y el área del cuadrado.

2. Si el área del círculo menor es 97 m^2, ¿cuál es el área del círculo mayor si la razón entre las áreas del menor al mayor es ⅔?

3. Si el área del rectángulo mayor es 60 m^2, ¿cuál es el área del rectángulo menor si la razón del mayor al menor es 5⁄4?

2.2.1 Serie de razones equivalentes

En matemáticas, se denomina *serie de razones equivalentes* a la igualdad de dos o más razones.

Simbólicamente, se representa así:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=...; b,d,f,h... \neq 0$$

Observe el ejemplo 1:

Hallar la serie de razones equivalentes a la razón ¾

Solución:

Si amplificamos la razón original que es ¾ por 4, se obtiene:

$$\frac{3}{4}=\frac{12}{16}=\frac{48}{64}=\frac{192}{256}=...$$

2.2.2 Propiedad fundamental de una serie de razones equivalentes

Dada una serie de razones equivalentes, la razón entre la suma de los antecedentes y la suma de los consecuentes es igual a una de las razones de la serie.

Simbólicamente, se representa así:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=...; b,d,f,h... \neq 0$$

Entonces:

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}\ldots; b,d,f,h\ldots\neq 0$$

Observe el ejemplo 2:

En la sala de informática de un colegio, el número de computadores es menor en relación con los estudiantes que hay por curso. Por esta razón, la profesora decide asignar un computador por cada dos estudiantes. Si uno de los cursos tiene 20 estudiantes, ¿cuántos computadores se necesitan?

Solución:

De acuerdo con la distribución realizada por la profesora de informática, la razón computador-estudiante es 1:2; luego, buscamos una razón equivalente que permita saber cuántos computadores se necesitan para 20 estudiantes.

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\frac{7}{14}=\frac{8}{16}=\frac{9}{18}=\frac{10}{20}\ldots; b,d,f,h\ldots\neq 0$$

De las anteriores razones, escogemos 10:20 y obtenemos:

1:2 = 10:20; luego, para 20 estudiantes se necesitan 10 computadores.

2.3 PROPORCIÓN

Una proporción es la igualdad de dos razones aritméticas.

Por ejemplo, $\frac{1}{2}=\frac{15}{30}$

Actividad:

1. Dadas las razones 4:5 y 6:80, ¿podemos asegurar que ellas forman una proporción? Justifique su respuesta.

2. Relacione la columna de las razones de la izquierda con la columna de las razones de la derecha para formar proporciones:

a. 1:5	( ) 50:55
b. 3:7	( ) 92:207
c. 4:9	( ) 63:147
d. 10:11	( ) 11:55

2.3.1 Formas de expresar una proporción

Una proporción se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ o también así } a:b::c:d$$

En ambos casos, los términos a y c se llaman *antecedentes* y los términos b y d se llaman *consecuentes*. También se pueden denominar así: a y d *extremos* y b y c *medios*.

La expresión:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, o, \ a:b::c:d, \text{ se lee, } a \text{ es } b \text{ como } c \text{ es } d$$

2.3.2 Propiedades de las proporciones

2.3.2.1 Propiedad fundamental de las proporciones

El producto de los extremos es igual al producto de los medios. Esto significa que:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ entonces } a\times d=b\times c$$

El concepto de proporción es muy utilizado para realizar dibujos y planos a escala.

Ejemplo:

Dada la siguiente proporción, comprobar la propiedad fundamental:

$$\frac{4}{8}=\frac{3}{6}, \text{ entonces } 4\times 6=8\times 3. \text{ Luego } 24=24$$

Actividad:

1. Dada la siguiente serie de razones iguales, aplique la propiedad fundamental para calcular tres razones equivalentes:

   3 : -5 = -6 : 10 = -12 : 20 = 21 : -35

2. ¿La siguiente expresión es una proporción? ¿Por qué?

   $$\frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$$

3. ¿En cuáles de las siguientes expresiones se cumple la propiedad fundamental de las proporciones?

   a) 4:6 y 8:12 b) 1:2 y 5:6
   c) 3:4 y 18:24 d) 1:4 y 10:40

4. ¿Cuáles de los siguientes pares de razones no forman una proporción? Justifique su respuesta.

   a) 1:2 y 4:8 b) 4:7 y 1:8
   c) 5:6 y 3:4 d) 3:5 y 6:10

2.3.2.2 Propiedades derivadas de la propiedad fundamental

A partir de la propiedad fundamental de las series de razones equivalentes y de la propiedad fundamental de las proporciones, es posible obtener otras propiedades útiles para el trabajo con proporciones.

Primera propiedad. En toda proporción, la adición o la sustracción de la primera proporción es a la adición o la sustracción de la segunda proporción como el numerador es al denominador.

Simbólicamente, se representa así:

$$Si\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, entonces\ \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b}, con\ b, d \neq 0$$

Segunda propiedad. En toda proporción, la suma o diferencia de los dos términos de la primera proporción es a su denominador como la suma o diferencia de los dos términos de la segunda proporción es a su denominador.

Simbólicamente, se representa así:

$$Si\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, entonces\ \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}, con\ b, d \neq 0$$

Tercera propiedad. Según explica Zabala. 2006.

> En toda proporción, la adición del antecedente y el consecuente de la primera razón es a la diferencia de estos como la suma del antecedente y del consecuente de la segunda razón es a su diferencia.
>
> Simbólicamente, se representa así:
>
> $$Si\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, entonces\ \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}, con$$
>
> $a,b,c,d \neq 0$
>
> **Cuarta propiedad.** En toda proporción, la suma o diferencia del antecedente y el consecuente de la primera razón es a su antecedente como la suma o diferencia del antecedente y el consecuente de la segunda razón es a su antecedente.
>
> Simbólicamente, se representa así:
>
> $$Si\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, entonces\ \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}, con$$
>
> $a,b,c,d \neq 0$
>
> (p.2)

2.4 APLICACIÓN DE LAS PROPORCIONES

2.4.1 Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar una proporción, la otra aumenta en la misma proporción; cuando al multiplicar o dividir una de las proporciones, la otra es multiplicada o dividida por el mismo número.

Ejemplo:

La entrada a cine para ver el estreno de una película tiene un valor de $6000. Se necesita completar una tabla que indique el valor recaudado por concepto de entradas.

Solución:

Podríamos resolver este problema de la siguiente manera:

$$Razon(R) = \frac{Número\ de\ personas(N)}{Valor\ recaudo\ (\$)}$$

En el caso de 2 personas, necesitamos calcular el valor recaudado: $R = \frac{2}{x}$

Para 3 personas: $R = \frac{3}{y}$

Para 4 personas: $R = \frac{4}{z}$

En general, para n personas: $R = \frac{n}{w}$

La solución de este problema conduce a la formación de proporciones entre las razones enunciadas con la razón base *1:6000*, entonces:

Para 2 personas, se tiene: $1:6000:2:x$, donde (1) $(x) = 2 \text{ x } 6000$. Por tanto, $x = \$12.000$

Para 3 personas: $1:6000:3:y$, donde (1) (y) = 3 x 6000. Por tanto, y = $18.000

Para 4 personas: $1:6000:4:z$, donde (1) (z) = 4 x 6000. Por tanto, z = $24.000

Para n personas: $1:6000:4:w$, donde (1) (w) = n x 6000. Por tanto, $w = \frac{n \times 6000}{1}$

A continuación, vea la Tabla 1.

Tabla 1

Número de personas versus valor recaudo

Número de personas	Valor recaudo ($)
1	6.000
2	12.000
3	18.000
4	24.000
5	30.000
…	…
n	n x 6.000

Nota: Elaboración propia.

Si representamos las parejas ordenadas (número de personas, valor recaudado) en el plano cartesiano, se aprecia que:

- Las magnitudes *número de personas* y *valor recaudado* están directamente relacionadas.
- Al dividir el valor recaudado por el número de personas, el resultado siempre es el mismo: 6000, y recibe el nombre de *constante de proporcionalidad*.
- Al dibujar estas magnitudes en el plano cartesiano, todos los puntos quedan sobre una línea recta.

A continuación, vea la Figura 3.

FIGURA 3. Número de personas vs recaudo. Elaboración propia.

En conclusión, tal como lo explican García, Orengo, Alcaide y Delgado (2007, p. 2), podemos decir que dos magnitudes son directamente proporcionales si:

- "La razón o cociente entre las dos magnitudes es un valor constante. Esta razón se llama constante de proporcionalidad directa".

- "Su representación gráfica es una línea recta que pasa por el origen del plano cartesiano".

Actividad:

1. Un lápiz cuesta $800. Elabore una tabla y un gráfico donde se pueda leer el valor de 2, 3, 4 y 5 lápices. Determine si las magnitudes son directamente proporcionales.

2. Si las magnitudes indicadas en la tabla de datos están directamente relacionadas, encuentre los valores que hacen falta.

Número de artículos	2	4	6	8	10
Precio	560	?	?	?	?

2.4.2 Magnitudes inversamente proporcionales

Según Soto Apolinar (2011), "cuando dos cantidades están en proporción de manera que al crecer una de las cantidades, la otra decrece la misma cantidad de veces, entonces las cantidades están en proporción inversa" (p. 130).

Una forma de reconocer cuándo dos magnitudes son inversamente proporcionales es realizar el producto entre ellas; si el producto es constante, se puede decir que las magnitudes son inversamente proporcionales.

Ejemplo:

Para construir un muro, un obrero emplea 32 días. ¿Cuánto tiempo se emplearía haciendo el mismo trabajo y con el mismo rendimiento si el número de obreros primero se duplica y luego se cuadruplica?

Solución:

Si duplicamos el número de trabajadores, se reduce a la mitad la cantidad de días necesarios para completar la obra: $\frac{32}{2}$.

Si cuadruplicamos el número de trabajadores, la obra se completa en la mitad del tiempo que emplean 2 obreros: $\frac{16}{2}$.

Número de obreros	Días utilizados para terminar la obra
1	32
2	16
4	8
8	4

Si representamos en el plano cartesiano las parejas ordenadas (número de obreros, días utilizados), se aprecia que:

Las magnitudes *número de personas* y *valor recaudado* están inversamente relacionadas.

Al multiplicar el número de obreros por el número de días utilizados, el resultado siempre es el mismo, 32, y recibe el nombre de *constante de proporcionalidad inversa*.

Al dibujar estas magnitudes en el plano cartesiano, la gráfica es una curva.

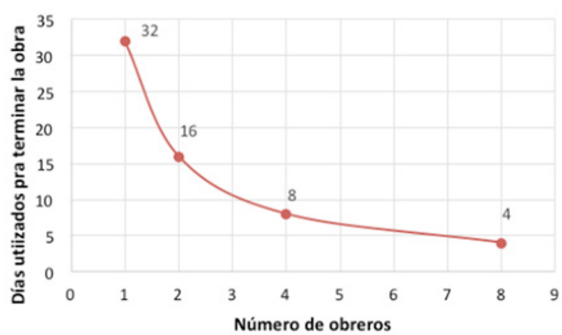

FIGURA 4. Número de obreros vs días utilizados para terminar la obra. Elaboración propia.

En conclusión, podemos decir que dos magnitudes son *inversamente proporcionales* si:

- Su representación gráfica es una curva decreciente.

- El producto entre las dos magnitudes es un valor constante. Este producto se llama constante de proporcionalidad inversa.

Actividad:

1. Un camión transporta cierta carga desde una ciudad A hasta una ciudad B, en 12

viajes. Elabore una tabla de valores que indique el número de viajes que se van a realizar si se utilizan 2, 3, 4 y 6 camiones con la misma capacidad de carga que el primero.

a. ¿Son directamente proporcionales las magnitudes *número de camiones y número de viajes?*
b. ¿Son inversamente proporcionales?
c. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
d. Realice el gráfico que describa esa relación. ¿Qué concluye?

2. Halle los términos que faltan en las siguientes tablas:

a.

x	2	4	6	8	10	12	14	16
y	1	0,5						

b.

x	1	3	5	7	9	11	13	15
y	5	1,6	1					

c. Identifique cuál de las tablas anteriores tiene relación directa o inversa.

2.5 REGLA DE TRES

Una regla de tres es un método que "sirve para calcular un valor desconocido de una proporción directa, dados los otros tres valores" (Soto, 2011, p. 139).

Una regla de tres es simple cuando únicamente intervienen dos magnitudes y es compuesta cuando intervienen tres o más magnitudes.

2.5.1 Regla de tres simple directa

La regla de tres simple directa es una igualdad entre dos proporciones, donde se conocen tres valores y un cuarto valor que es una incógnita; se establece una relación de linealidad (proporcionalidad) entre los valores involucrados (análogo para proporcionalidad directa).

Normalmente, se representa de la siguiente forma:

$$X \to C$$
$$A \to B$$

Ejemplo 1:

Si cinco litros de leche cuestan $8500, ¿cuál es el costo de 15 litros?

Solución:

Estas cantidades las podemos representar en el siguiente orden:

5 litros de leche $\xrightarrow{cuestan}$ $8500

15 litros de leche $\xrightarrow{costarán}$ X

$$x = \frac{(15\ litros)(\$8.500.00)}{5\ litros} = \$25.500.00$$

En el problema planteado, aparecen dos magnitudes (pesos y litros) y cuatro cantidades, de las cuales solo conocemos tres. También podemos ver que a mayor cantidad de litros, mayor costo; por tanto, las magnitudes son directamente proporcionales.

Ejemplo 2:

Si 4 cuadernos cuestan $8000, ¿cuánto costarán 10 cuadernos?

Solución:

Primero, se ordenan los datos conocidos así:

4 cuadernos $\xrightarrow{cuestan}$ $8000

10 cuadernos $\xrightarrow{costarán}$ X

Las magnitudes son directamente proporcionales; por tanto, estas cantidades se pueden expresar como una proporción, es decir, como la igualdad de dos razones. Luego, se aplica la propiedad fundamental de las proporciones y se obtiene:

$$x = \frac{(10\ cuadernos)(\$8.000.00)}{4\ cuadernos} = \$20.000.00$$

También, se puede representar la proporción del problema anterior así:

Cuadernos	Precio
4	$1200
10	X

2.5.2 Regla de tres simple inversa

Cuando los valores que intervienen en una igualdad de dos proporciones, una proporción es inversamente proporcional, y al multiplicarlas entre las cantidades correspondientes, se hace de forma horizontal.

Ejemplo:

Treinta hombres construyen un puente en 20 días. ¿Cuántos días emplearán 50 hombres para construir otro puente semejante?

Solución:

Al hacer el análisis de la proporción, se observa que las magnitudes son *inversamente proporcionales*, porque a mayor número de hombres trabajando en la construcción del puente, se emplean menos días en la obra y viceversa.

30 hombres $\xrightarrow{demoran}$ 20 días

50 hombres $\xrightarrow{demorarán}$ X

Como las magnitudes que intervienen son inversamente proporcionales, el producto de las cantidades correspondientes es constante:

(30 hombres) (20 días) = (50 hombres) (x días)

$$x = \frac{(30\ hombres)(20\ dias)}{50\ hombres} = 12\ dias$$

Luego, son 12 los días que necesitarán emplear los 50 hombres para construir el puente.

También, la proporción del problema anterior se puede representar así:

hombres	días
30	20
50	X

2.5.3 Regla de tres compuesta

Una regla de tres compuesta es cuando intervienen tres o más magnitudes. Su solución es muy práctica y se descompone en reglas de tres simples, teniendo en cuenta que pueden ser directa o inversamente proporcionales.

Veamos un ejemplo tomado de Baldor (1986):

> 13 obreros, trabajando 6 horas al día, han construido 420 metros de carretera en 4 días. ¿Cuántos metros construirán 18 obreros trabajando en las mismas condiciones 7 horas al día durante 5 días?
>
> | | | | | | | | |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|
> | 13 | obreros | 6 | horas | 4 | días | 420 | metros |
> | 18 | - | 7 | - | 5 | - | x | - |
>
> Se tendrán: $x = 420 \times \frac{18}{13} \times \frac{7}{6} \times \frac{5}{4} =$ $848{,}07\ m$

En este tipo de ejercicios, las magnitudes que intervienen pueden ser directamente proporcionales, en cuyo caso la regla de tres es compuesta directa. Si las magnitudes son inversamente proporcionales, entonces la regla de tres es compuesta inversa. Si se da el caso de que las magnitudes son directa e inversamente proporcionales al mismo tiempo, la regla de tres es compuesta mixta.

Ejemplo:

El valor de tres cajas de 12 chocolatinas es de $4500 la unidad. ¿Cuánto cuestan 5 cajas de 24 chocolatinas si el precio de cada chocolatina es igual?

Solución:

Organicemos los datos del problema para hacer un análisis de sus magnitudes:

3 cajas de 12 chocolatinas	$\xrightarrow{\textit{cuestan}}$	\$4500
5 cajas de 24 chocolatinas	$\xrightarrow{\textit{cuestan}}$	\$ X

Primera comparación:

Podemos comparar las magnitudes de cantidades conocidas, es decir, el número de cajas y el número de chocolatinas, con la magnitud desconocida, es decir, el precio:

3 cajas	$\xrightarrow{\textit{cuestan}}$	\$4500
5 cajas	$\xrightarrow{\textit{cuestan}}$	\$ X

Al hacer la comparación, nos damos cuenta de que esas magnitudes son *directamente proporcionales*.

Segunda comparación:

Para iniciar la segunda comparación, se debe tener en cuenta que 3 cajas de 12 chocolatinas, es decir, 36 chocolatinas, cuestan \$4500. Además, hay que averiguar el precio de 5 cajas de 24 chocolatinas, o sea, de 120 chocolatinas.

36 chocolatinas	$\xrightarrow{\textit{cuestan}}$	\$4500
120 chocolatinas	$\xrightarrow{\textit{cuestan}}$	\$ X

Al hacer esta comparación, notamos que las magnitudes son *directamente proporcionales*.

chocolatinas	Precio (\$)
36	4500
120	X

Resolviendo esta proporción mediante la propiedad fundamental, se tiene:

$$(36)(x) = (120)(4500)$$

$$x = \frac{(120)(4500)}{36} = \$15.000.00$$

Luego, \$15 000 es el valor de las 5 cajas de 24 chocolatinas.

Podríamos también representarlo mediante la siguiente expresión:

3	cajas	\$4500	precio	12	chocolatinas
5	+	x	+	24	+

El valor de las 5 cajas de 24 chocolatinas es

$$x = \frac{5 \text{ x } 4500 \text{ x } 24}{3 \text{ x } 12} = \$15\,000$$

Observa que el resultado es igual para ambos casos.

2.5.4 La regla de tres en la resolución de problemas

Diariamente, realizamos muchas operaciones matemáticas en las que aplicamos reglas de tres sin ser conscientes de que lo estamos haciendo.

Son muy diversas las situaciones en que aplicamos la regla de tres; por ejemplo:

- En una obra civil los precios o incrementos en los materiales.
- Hallar el valor del IVA en los productos.
- Hallar el interés simple y compuesto.
- Hallar el índice de precios al consumo.

2.5.5. Regla de tres compuesta directa

Según la *Aritmética* de Baldor, 1986,

> La regla de tres compuesta se simplifica si utilizamos el método directo en lugar de descomponer en pequeñas reglas de tres simples, el planteamiento se hace directo. A las magnitudes que sean directamente proporcionales con la incógnita se les coloca debajo un signo + y encima un signo -, y a las magnitudes que sean inversamente proporcionales con la incógnita se les coloca debajo

> un signo - y encima un signo +. El valor de la incógnita x, será igual al valor conocido de su misma especie (al cual siempre se le coloca +), multiplicando por todas las cantidades que llevan el signo +, partiendo este producto por el producto de las cantidades que llevan el signo -.

Por lo tanto, debemos recordar que hay que multiplicar "en cruz" si la relación entre las magnitudes es directamente proporcional o "en fila" si la relación es inversamente proporcional.

Una regla de tres compuesta es directa cuando las tres magnitudes que en ella intervienen son directamente proporcionales.

Ejemplo 1:

En la *Aritmética* de Baldor, 1986, se plantea lo siguiente

> Un campamento de 1600 hombres tiene víveres para 10 días a razón de 3 raciones diarias cada hombre. Si se refuerza con 400 hombres, ¿cuántos días durarán los víveres si cada hombre toma 2 raciones diarias?
>
> **Solución:**

1600	hombres	10	días	3	raciones diarias
2000	-	x	-	2	-

Durarán los víveres

$$x = \frac{1600 \text{ x } 10 \text{ x } 3}{2000 \text{ x } 2} = 12 \textit{ días}$$

Ejemplo 2:

Diez estudiantes están pintando 120 m^2 de pared y en esta labor emplean 6 horas diarias. ¿Cuántos m^2 podrán pintar 15 estudiantes si trabajan 8 horas diarias en las mismas condiciones?

Solución:

10	estudiantes	120	m^2	6	horas diarias
15	+	x	+	8	+

$$x = \frac{15 \text{ x } 120 \text{ x } 8}{10 \text{ x } 6} = 240 \, m^2$$

Podrán pintar 15 estudiantes si trabajan 8 horas diarias.

2.5.6 Regla de tres compuesta inversa

Una regla de tres compuesta es inversa cuando las tres magnitudes que en ella intervienen son inversamente proporcionales.

Ejemplo 1:

Un grupo de 40 estudiantes de séptimo tienen que presentar durante 15 días 150 ejercicios de matemáticas. ¿En cuánto disminuirá el número de ejercicios por estudiante si en el momento de iniciar la presentación del trabajo se incrementa el grupo a 45 estudiantes y se amplía el periodo a 25 días?

Solución:

Estudiantes	Ejercicios	Horas diarias
40 --	150 +	15 --
45 +	X --	25 +

$$(40)(150)(15) = (45)(x)(25)$$

$$x = \frac{(40)(150)(15)}{(45)(25)} = 80 \textit{ ejercicios}$$

Ejemplo 2:

Un grupo de 10 modistas hacen en 15 días un vestido de novia trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos días emplearán 12 modistas haciendo el mismo trabajo durante 5 horas diarias?

Solución:

Modistas	Días	Horas diarias
10	15	8
12	X	5

$$(10)(15)(8) = (12)(x)(5)$$

$$x = \frac{(10)(15)(8)}{(12)(5)} = 20 \text{ dias}$$

2.5.7 Regla de tres compuesta mixta

Una regla de tres compuesta es mixta cuando en ella intervienen magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales.

Ejemplo:

Un tejedor artesanal teje 8 metros de tela durante 5 días trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántas horas diarias deberá trabajar durante 10 días para tejer 12 metros de tela?

Solución:

Metros	Días	Horas diarias
8	5	8
12	10	X

$$(12)(8)(5) = (8)(x)(10)$$

$$x = \frac{(12)(8)(5)}{(8)(10)} = 6 \text{ horas diarias}$$

2.6 REPARTOS PROPORCIONALES

Muchas situaciones de la vida diaria plantean problemas sobre cómo una determinada cantidad de dinero, terreno o longitud debe repartirse en forma directa o inversamente proporcional a otras dadas, como edad y velocidad.

2.6.1 Reparto proporcional directo

Sean a, b, c los números (cantidades con respecto a las cuales se hace el reparto) que corresponden a x, y, z (cantidades que se van a determinar), en un *reparto proporcional directo* se cumple que:

$$\left.\begin{array}{rcl} a & \leftrightarrow & x \\ b & \leftrightarrow & y \\ c & \leftrightarrow & z \\ a+b+c & \leftrightarrow & x+y+z \end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{l} \dfrac{x+y+z}{a+b+c} = \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} \\ \dfrac{x+y+z}{a+b+c} = \dfrac{x}{a} \\ \dfrac{x+y+z}{a+b+c} = \dfrac{y}{b} \\ \dfrac{x+y+z}{a+b+c} = \dfrac{z}{c} \end{array}$$

Ejemplo:

Reparta 357 en cantidades directamente proporcionales a 17, 20, 38 y 44.

Solución:

Números	17	20	38	44
Valor	x	y	z	w

Como estas magnitudes son directamente proporcionales, se tiene:

$$\frac{x+y+z+w}{17+20+38+44}=\frac{x}{17}=\frac{y}{20}=\frac{z}{38}=\frac{w}{44}$$

Reemplazando $x+y+z+w=357$, se tiene:

$$\frac{357}{119}=\frac{x}{17} \qquad x=\frac{(357)(17)}{119},\ x=51$$

$$\frac{357}{119}=\frac{y}{20} \qquad x=\frac{(357)(20)}{119},\ y=60$$

$$\frac{357}{119}=\frac{z}{17} \qquad z=\frac{(357)(38)}{119},\ z=114$$

$$\frac{357}{119}=\frac{w}{44} \qquad x=\frac{(357)(44)}{119},\ w=132$$

Comprobación:

$$51+60+114+132=357$$

2.6.2 Reparto proporcional inverso

Sean a, b, c los números (cantidades con respecto a las cuales debe efectuarse el reparto) que corresponden a x, y, z (cantidades que se van a determinar), en un *reparto proporcional inverso* se cumple que:

$$\left.\begin{array}{ccc} a & \leftrightarrow & x \\ b & \leftrightarrow & y \\ c & \leftrightarrow & z \\ a+b+c & \leftrightarrow & x+y+z \end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{l} \dfrac{x+y+z}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\dfrac{x}{\frac{1}{a}}=\dfrac{y}{\frac{1}{b}}=\dfrac{z}{\frac{1}{c}} \\ \dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{x}{\frac{1}{a}} \\ \dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{y}{\frac{1}{b}} \\ \dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{z}{\frac{1}{c}} \end{array}$$

Ejemplo:

Reparta 590 en cantidades inversamente proporcionales a 5, 6 y 8.

Solución:

Números	5	6	8
Valor	x	y	z

$$\frac{x+y+z}{\frac{1}{5}=\frac{1}{6}=\frac{1}{8}}=\frac{x+y+z}{\frac{24+20+15}{120}}=\frac{x+y+z}{\frac{59}{120}}$$

Como =

$$x+y+z=590 \longrightarrow \frac{590}{\frac{59}{120}}=\frac{x}{\frac{1}{5}}=\frac{x}{\frac{1}{6}}=\frac{x}{\frac{1}{8}}$$

Entonces:

$$\frac{\frac{590}{59}}{120} = \frac{\frac{x}{1}}{5} \longrightarrow 5\,x = \frac{(590)\,(120)}{59} \longrightarrow x = 240$$

Procediendo de manera similar, se obtiene:

y=200

z=150

2.7 PORCENTAJE

El porcentaje de un número dado es una o varias de las 100 partes iguales en que puede dividirse el número. Un porcentaje equivale a una fracción cuyo denominador es 100. Se simboliza así: %.

Se lee de la siguiente manera:

- 7 por ciento = 7% = 7 por cada 100 = $\frac{7}{100}$, indica que tomamos 7 partes iguales de las 100 en que se divide la magnitud.
- 38 por ciento = 38% = 38 por cada 100 = $\frac{38}{100}$, indica que tomamos 38 partes iguales de las 100 en que se divide la magnitud.

Ejemplo:

Hallar el 35% de 3500.

Solución:

Se plantea una regla de tres simple directa con estas cantidades y hallamos el valor de x, que es el valor buscado

100%	3500
35%	X

Luego, el 35 de 3500 es 1125.

Actividad:

1. Responde:

a. ¿Qué porcentaje de 60 es 12?

b. ¿Qué porcentaje de 20 es 16?

c. ¿Qué porcentaje de 25 es 16?

d. ¿Qué porcentaje de 45 es 15?

e. ¿Qué porcentaje de 21 es 3

f. ¿Qué porcentaje de 160 es 40

2. De un grupo de 100 estudiantes, 57 ven noticieros en televisión:

a. Expresa en forma de porcentaje cuántos estudiantes ven noticieros en televisión.

b. ¿Qué porcentaje no ve noticieros en televisión?

2.7.1 Tanto por ciento de un número

Calcular el *tanto por ciento (%)* de un número equivale a aplicar el operador fraccionario con denominador 100 al número dado. El tanto por ciento también se puede calcular mediante una regla de tres simple directa.

Ejemplo:

Calcular el 25% de 60.

Solución:

Se plantea una regla de tres simple directa con estas cantidades y hallamos el valor de x, que es el valor buscado.

100%	60
25%	X

$$x = \frac{(25)\,(60)}{100}$$

Luego, el 25% de 60 es 15.

2.8 CONCLUSIÓN

Las razones y proporciones son utilizadas para comparar cantidades o para establecer la relación que debe existir entre dos cantidades; por ejemplo, pueden utilizarse al relacionar los diferentes componentes en una mezcla o en las proporciones entre materiales que se utilizan para realizar diferentes trabajos (para diluir una pintura, la relación diluyente-pintura debe estar en la razón 1:3, etc.).

2.9 REFERENCIAS

Baldor, A. (1986). *Aritmética*. Madrid: Compañia Editorial y Distribuidora de Textos Americanos S.A.

Egoavil, J. R. (2014). *Fundamentos de matemáticas*. Lima: Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

García, M., Orengo, J. J., Alcaide, F. y Delgado, P. (2007). Proporcionalidad, progresiones y funciones. En *Cuadernos de matemáticas*. Madrid: Ediciones SM. Recuperado el 18 de abril de 2019, de http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/04700107/helvia/aula/archivos/repositorio/0/49/3ESO_5.pdf

Soto Apolinar, E. (2011). *Diccionario ilustrado de conceptos matemáticos*. México D.F.: s. l. (libro de distribución gratuita). Recuperado el 18 de abril de 2019, de http://wordpress.colegio-arcangel.com/matematicas/files/2012/10/DICM.pdf

Zabala, M. A. (2006). *Razones y proporciones*. Recuperado el 14 de marzo de 2019, de http://www.feyalegria.org/images/acrobat/11razonesyprop_157.pdf

3. POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

3.1 PREFACIO

En este capítulo, desarrollaremos la potenciación o exponenciación y la radicación, y se trabajarán sus propiedades y leyes. La potenciación o exponenciación es una multiplicación de varios factores iguales. "Las partes de la potenciación son: la base y el exponente, que se escribe en forma de superíndice. El exponente nos dice la cantidad de veces que la base se multiplica por sí misma" (E-magister.com, s. f.).

La radicación, por su parte, es la operación inversa de la potenciación. Consiste en hallar un número que al elevarlo al índice de la raíz nos dé igual a la cantidad subradical. A continuación, se dará una definición más concreta de estas operaciones y sus propiedades.

Definición. Sea n un entero positivo y a cualquier número real, el producto de n *veces* a es igual a a^n

$$\underbrace{a.a.a.a.a.a.a.a...a}_{n-veces} = a^n$$

La radicación es la operación inversa a la potenciación. Sea $\sqrt[n]{x}$,n nos indica el orden de la raíz: cuadrada, cúbica, etc.

3.2 LEYES DE SIGNOS

Para la potenciación:

$$(-)^{PAR} = (+); \qquad (-)^{IMPAR} = (-);$$

$$(+)^{PAR} = (+); \qquad (+)^{IMPAR} = (+)$$

Para la radicación:

$$\sqrt[PAR]{(+)} = \pm; \qquad \sqrt[IMPAR]{(+)} = +;$$

$$\sqrt[PAR]{(-)} = \textit{No tiene solución en los } R; \qquad \sqrt[IMPAR]{(-)} = (-)$$

3.3 PROPIEDADES DE POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

a. $a^0 = 1$

b. $a^1 = a$

c. $a^{-1} = \frac{1}{a}$, en forma general $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

d. $(ab)^n = a^n b^n$

e. $a^n a^m = a^{n+m}$

f. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0$

g. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$

h. $(a^n)^m = a^{nm}$

i. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

j. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

k. Si n es par, entonces: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ existe si y solo si $a \geq 0$

l. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$

Ejemplo:

$$\frac{x^2\ x^3\ y\ y^4}{x^4\ y^7} = \frac{x^{2+3}\ y^{1+4}}{x^4 y^7}$$

Solución:

Primero, hacemos el producto de bases iguales aplicando la propiedad e.

$$\frac{x^5 y^5}{x^4 y^7} = x^{5-4} y^{5-7}$$

Luego, se realiza el cociente de bases iguales, aplicando la propiedad f.

$$x\,y^{-2} = \frac{x}{y^2}$$

Por último, utilizamos las propiedades b y c, completando el ejercicio y teniendo como respuesta un término más simplificado. Para concluir, tenemos que:

$$\frac{x^2\,x^3\,y\,y^4}{x^4\,y^7} = \frac{x}{y^2}$$

Actividad:

Simplificar:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

b) $\left(\frac{3}{5} \times \sqrt{y}\right)^{2}$

c) $\left(\frac{4x}{y^{-2}}\right)^{3}\left(\frac{-y}{4x^2}\right)^{-2}$

d) $\frac{\sqrt[3]{-1000}}{\sqrt[3]{8}}$

e) $\frac{\sqrt{7ab^2}}{\sqrt{4\,9a}\,\sqrt{7b^4}}$

f) $\left(\sqrt[-3]{\frac{-64x}{xy^3}}\right)^{3}$

1. Se quieren colocar 21 pasteles en una bandeja cuadrada.

   ¿Cuántas filas se podrán formar?

   ¿Cuántos pasteles se pueden ubicar en cada fila?

   ¿Cuántos pasteles sobran?

   A. 5 4 4

   B. 4 4 5

   C. 4 5 4

   D. 5 5 4

3.4 CONCLUSIÓN

La potenciación y la radicalización son utilizadas por los ingenieros para asociar las soluciones y problemas concretos, creando modelos matemáticos que les permitan analizar y obtener potenciales soluciones de diversas situaciones de la ingeniería.

3.5 REFERENCIAS

Chappe, Á. (2012). *Introducción a las matemáticas*. Bogotá: Politécnico Grancolombiano.

E-magister.com (s. f.). *Aritmética I*. Recuperado de https://www.emagister.com/uploads_courses/Comunidad_Emagister_56362_aritmetica.pdf

4. Álgebra básica

4.1 PREFACIO

En este capítulo, nos dedicaremos a recordar y a afianzar nuestros conocimientos de operaciones entre expresiones algebraicas, donde se combinan números, variables y operaciones como: suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y factorización. La destreza para desarrollar las expresiones algebraicas es requisito para las aplicaciones en el álgebra y en el planteamiento de un problema en ingeniería.

4.2 CONCEPTOS BÁSICOS

Definiremos qué es un término, las partes de un término y términos semejantes.

4.2.1 Término algebraico

Un término algebraico tiene la forma ax^n, donde a es coeficiente, x es la parte variable y n es la potencia o el grado.

Los términos se pueden agrupar de acuerdo con el número de términos que tenga una expresión algebraica, de la siguiente manera:

- *Monomio*: son expresiones que tienen un solo término. Ej. $3x^5$, $4x^2$
- *Binomio*: son expresiones que tienen 2 términos unidos por el signo (+) o (–). Ej. $4x^3$, $2x^4$
- *Trinomio*: son expresiones que tienen tres términos unidos por signos. Ej. $3x^2 - 7x^6 + 5x$
- *Polinomios*: es el caso general y son expresiones que tienen cuatro o más términos unidos por signos. Ej. $3x^3 + 2x^2 - 5x - 1 + 9x^5$ (**)

Observación. Una constante se puede representar como una expresión algebraica de la siguiente manera:

$$5 = 5x^0$$

$$10 = 10x^0$$

- *Grado de un polinomio*: el grado del polinomio lo da el exponente más grande. Por ejemplo, en la expresión $7x^6 + 5x^4 - 3x + 1$ el mayor exponente de la variable x es el 6, por lo tanto, el grado del polinomio es 5.

Nota. Todos los polinomios se deben ordenar de mayor a menor teniendo en cuenta los exponentes. Ej. En el polinomio (**) se debe escribir de la siguiente manera:

$$9x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 5x - 1$$

4.2.2 Términos semejantes

Dos términos son semejantes si y solo si tienen el mismo grado; por ejemplo:

$3x^4$, $5x^4$, x^4, $-2x^4$

4.3 OPERACIONES ENTRE POLINOMIOS

Estudiaremos la suma, la diferencia y el producto de polinomios y productos notables.

4.3.1 Suma y diferencia de polinomios

Para sumar algebraicamente dos polinomios, primero se eliminan los signos de agrupación teniendo en cuenta la ley de los signos. (Si es “+”, los signos del polinomio quedan iguales; y si es “-”, los signos cambian).

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}&(-2x^3 + 5x^2 + 8x + 10) - \left(4x^4 - 8x^3 - 6x^2 - 3\right)\\&= -2x^3 + 5x^2 + 8x + 10 - 4x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 3\\&= -4x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 8x + 13\end{aligned}$$

Luego, lo que hacemos es sumar los términos semejantes, con lo que tendríamos:

$$
\begin{array}{r}
-2x^3+5x^2+8x+10 \\
\underline{-4x^4+8x^3+\ 6x^2\qquad +\ 3} \\
-4x^4+6x^2+11x^2+8x+13
\end{array}
$$

4.3.2 Producto de polinomios

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica término a término cada uno de los monomios del primero por cada monomio del segundo y luego se suman los términos semejantes.

Daremos un ejemplo para poder ver más claramente el proceso. Sean:

$$P(x)=2x^3+5x^2-3 \quad y \quad Q(x)=x^3+4$$

Tendríamos que el polinomio resultante *P(x) . Q(x)* es:

$$P(x).Q(x)=\left(2x^3+5x^2-3\right)\left(x^3+4\right)$$

$$=\left(2x^3\right)\left(x^3\right)+\left(2x^3\right)(4)+\left(5x^2\right)\left(x^3\right)+\left(5x^2\right)(4)-(3)\left(x^3\right)-(3)(4)$$

$$=2x^6+8x^3+5x^5+20x^2-3x^3-12$$

En este momento, ya tenemos el producto de polinomios, Solo falta sumar los términos semejantes y ordenar el polinomio resultante, con lo cual tendríamos que:

$$P(x).Q(x)=2x^6+5x^5+5x^3+20x^2-12$$

La multiplicación de polinomios cumple las propiedades asociativa y conmutativa.

La multiplicación de polinomios es distributiva respecto a la adición. Sean *P(x), Q(x), R(x)* polinomios, entonces *P(x),* [*Q(x)*±*R(x)*] = *P(x)* . *Q(x)*± *P(x)* . *R(x)*

4.3.3 Productos notables

a. Binomio al cuadrado:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

b. Binomio al cubo:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

c. Binomio a la enésima potencia:

$$(a+b)^n = K_1a^n+K_2a^{n-1}b+K_3a^{n-2}b^2+......+K_{n-1}a^2b^{n-2}+k_nab^{n-1}+K_{n+1}b^n$$

Los coeficientes *K*, se calculan mediante el *triángulo de Pascal*:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
. \qquad\qquad . \qquad\qquad . \\
. \qquad\qquad\quad . \qquad\qquad\quad . \\
. \qquad\qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad . \\
k_1 \quad k_2 \quad k_3 \qquad\qquad\qquad\qquad k_n \quad k_{n+1}
\end{array}
$$

Ejemplo 1:

$(2x^3 + 5)^4 = 1(2x^3)^4 + 4(2x^3)^3(5) + 6(2x^3)^2(5)^2 + 4(2x^3)^1(5)^3 + 1(5)^4$

Signos: *Si el binomio es una suma, todos los términos son positivos.

*Si el binomio es una resta, los signos se intercalan, comenzando con positivo, tal como lo vimos en ejemplo.

d. Suma por diferencia:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Ejemplo 2:

$$(5x+8)(5x-8)=(5x)^2-(8)^2=25x^2-64$$

Nota. Se define como el conjugado de $a+b$ a la expresión $a\text{-}b$ y viceversa.

Actividad:

Efectúe y simplifique las siguientes operaciones:

$a)\ (-x+2)^3-(3x-1)(3x+2)+(3x-x^2+1)^2$

$b)\ (4x-1)(4x+1)-(-3x+2)^2+(x^2-1)(x^2+3)$

$c)\ (x+7)(x-2)-(2x-2x^2-1)+(x^2-1)(x^2+3)$

$d)\ (2x-1)^2-(2-3x)(3x+2)-(-2x-x-x^2)$

4.4 FACTORIZACIÓN

4.4.1 Factor común

Se utiliza cuando todos los términos de una expresión algebraica tienen términos en común (se denomina factor común). De esta manera, se representa la expresión algebraica como el producto del factor común con una nueva expresión, que al multiplicarla con el factor común, nos resulta la expresión que teníamos.

Daremos un ejemplo para poder ver claramente el proceso:

Ejemplo 1:

Sea $x^2y + xy - x^3 + x$

Solución:

Tenemos que la expresión podemos expresarla:

$$xxy+xy-xx^2+x$$

Donde el elemento x es en común a todos los términos. La expresión ya factorizada quedaría de la siguiente manera:

$$x\left(xy+y-x^2+1\right)$$

Por lo cual tenemos que:

$$x^2y+xy-x^3+x=x\left(xy+y-x^2+1\right)$$

Nota. Cuando factoricemos, debemos tomar como factor común la mayor expresión contenida en todos los términos de la expresión algebraica, como lo veremos en el ejemplo 2.

Ejemplo 2:

Sea $64z^3x^2y + 8x^2z^2y^3 - 32x^3wz^3 - 32x^3wz^3 + 16x^2y^2z$

Solución:

Podemos ver que en la expresión el factor común son la x y la z, y factorizando tendríamos:

$$xz\left(64z^2xy+8xzy^3-32x^2wz^2+16xy^2\right)$$

Pero xz no es la mayor expresión contenida, como se ve a continuación:

$$xz\left(8.8z^2xy+8xzy^3-8.4xxwz^2+8.2xy^2\right)$$

También como factor común está el término $8x$, por lo cual tendríamos:

$$8x^2z\left(8z^2y+zy^3-4xwz^2+2y^2\right)$$

Podemos notar que en la expresión no tenemos más elementos en común, por lo cual la expresión quedaría totalmente factorizada:

$64z^3x^2y + 8x^2z^2y^3 - 32x^3wz^3 + 16x^2y^2z = 8x^2z\ (8z^2y + zy^3 - 4xwz^2 + {}^2y^2)$

4.4.2 Diferencia de cuadrados

Recordemos los productos notables, de los cuales hay uno en especial que es el de la suma por diferencia.

$$\left(a+b\right)\left(a-b\right)=a^2-b^2$$

Con este caso, podemos deducir la factorización cuando tenemos una diferencia de dos cuadrados, así:

$$a^2-b^2=\left(a+b\right)\left(a-b\right)$$

Daremos algunos ejemplos para poder entender mejor esta factorización.

Ejemplo 1:

$$25-x^2=5^2-x^2$$

Para este caso particular, tendríamos que a=5 y b=x. Utilizando la factorización, tendríamos que:

$$25-x^2=\left(5+x\right)\left(5-x\right)$$

Ejemplo 2:

$$75x^6-48y^4$$

En este caso, es conveniente primero utilizar el factor común, con lo que se tendría:

$$3\,(25x^6-16y^4)$$

Ahora tenemos que la expresión que se está multiplicando por 3 podemos expresarla como:

$$3((5x^3)^2-(4y^2)^2)$$

Utilizando la diferencia de cuadrados, tendríamos que a=$5x^3$ y b = $4y^2$, por lo cual tenemos que:

Y concluimos con que:

$$3\,(5x^3+4y^2)\,(5x^3-4y^2)$$

$$75x^6-48y^4=3\,(5x^3+4y^2)\,(5x^3-4y^2)$$

Ejemplo 3:

$$5x^2-3y^4=(\sqrt{5}\,x+\sqrt{3}\,y^2)\,(\sqrt{5}\,x-\sqrt{3}\,y^2)$$

4.4.3 Trinomio cuadrado perfecto

Recordemos que un cuadrado es perfecto si es el producto de dos factores iguales; por ejemplo x^2 porque x^2 = $(x)(x)$ y también $9x^6$ porque $9x^6 = (3x^3)(3x^3)$.

Ahora veremos cuándo un trinomio es cuadrado perfecto:

Definición. Sea $P(x)$ un trinomio cuadrado perfecto si y solo si uno de los términos es dos veces el producto de las raíces de los otros dos. Como lo vemos en el ejemplo:

$$\begin{array}{ccccc} P(x)= & (ax)^2 & + \ 2(b)(ax) \ + & b^2 \\ & \Downarrow & \Updownarrow & \Downarrow \\ & \sqrt{(ax)^2}=ax & & \sqrt{(b)^2}=b \\ & & 2\,(ax)\,b & \end{array}$$

Veremos algunos ejemplos de trinomios cuadrados perfectos.

Nota. Los signos de los términos cuadrados deben ser iguales.

Ejemplo 1:

$$P(x) = (9x)^2 \quad - \quad 24x \quad + \quad 16$$

$$\Downarrow \quad \Updownarrow \quad \Downarrow$$

$$\sqrt{(9x)^2} = 3x \qquad \sqrt{16} = 4$$

$$2(3x)4$$

Por lo cual podemos concluir que $P(x)$ es un trinomio cuadrado perfecto.

Es bueno notar que en el caso de que el trinomio no cumpla con las condiciones vistas, concluiremos que el trinomio no es cuadrado perfecto.

Factorización de un trinomio cuadrado perfecto:

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto, se escribe dicho trinomio como el cuadrado de la suma o de la diferencia de las raíces de sus cuadrados perfectos.

Sea $P(x) = (ax)^2 + 2(b)(ax) + b^2$ un trinomio cuadrado perfecto; entonces tenemos que:

$$P(x) = (ax+b)^2$$

Ejemplo 2:

Verificar el siguiente polinomio. ¿Es un trinomio cuadrado perfecto?

$$P(x) = \frac{1}{16}x^2 - 4x + 64$$

Sacamos las raíces cuadradas a los términos de los extremos:

$$\sqrt{\frac{1}{16}x^2} = \frac{1}{4}x \text{ y } \sqrt{64} = 8$$

Luego multiplicamos estos dos resultados por 2: 2 x ¼ x x8 = $4x$

Por consiguiente, $P(x)$ es trinomio cuadrado perfecto, entonces:

$$P(x) = \left(\frac{1}{4}x - 8\right)^2$$

Ejemplo 3:

$$4x^2 - 4\sqrt{5}\,x + 5 = \left(2x - \sqrt{5}\,x\right)^2$$

Ejercicio propuesto: $5x^6 - 4\sqrt{15}\,x^3 + 12$

4.4.4 Trinomio de la forma $x^2 + ax + b$ (donde a, b son constantes)

Sea $P(x) = x^2 + ax + b$, entonces podemos factorizar a $P(x)$ de la siguiente forma:

$$P(x) = (x+c)(x+d)$$

Donde c, d son constantes que cumplen con la siguiente condición específica:

$cd = b$ y $c + d = a$ (Suma algebraica)

Mostraremos la factorización con un ejemplo en particular.

Ejemplo 1:

Sea $P(x) = x^2 - 2x - 15$, entonces $P(x) = (x - 5)(x + 3)$

Donde $(-5)(3) = -15$ y

$-5 + 3 = -2$

Ejemplo 2:

Sea $P(x) = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$, entonces

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x-2)$$

Donde $\left(\frac{1}{2}\right)(-2) = -1$ y

$$\frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

4.4.5 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Se factoriza llevando el trinomio a la forma anterior. Para esto, se multiplica y se divide la expresión por el valor de la constante que acompaña al x^2, por lo que tendremos:

$$\frac{a}{a}\left(ax^2+bx+c\right)$$

Realizando la multiplicación, tenemos que:

$$\frac{(ax)^2+b(ax)+ac}{a}$$

Luego, el polinomio que tenemos en el numerador lo podemos factorizar fácilmente y tendríamos:

$\dfrac{(ax+s)\quad(ax+t)}{a}$ con $st = ac$ y $s + t = b$ (Suma algebraica)

Se descompone el número a como producto de dos factores con el fin de simplificar la expresión anterior.

Veamos con un ejemplo más claro todo el proceso.

Ejemplo 1:

Sea $P(x)=3x^2-x-2$

Solución:

Primero multiplicamos y dividimos por 3 a *P(x)*, con lo que tendríamos:

$$\frac{3\left(3x^2-x-2\right)}{3}$$

Realizaremos el producto del 3 por toda la expresión de la siguiente manera:

$$\frac{(3x)^2-1(3x)-6}{3}$$

Ahora factorizamos el numerador, con lo que tendríamos:

$$\frac{(3x-3)(3x+2)}{3}$$

Teniendo como factor común el 3 del numerador, tenemos:

$$\frac{3(x-1)(3x+2)}{3}$$

Y simplificamos el 3 del numerador con el 3 del denominador, con lo cual quedaría *P(x)* factorizado de la siguiente manera:

$$P(x)=(x-1)(3x+2)$$

Ejemplo 2:

$$12x^2-32x-35$$

Solución:

$$=\frac{(12x)\leq -32(12x)-420}{12}$$

$$=\frac{(12x-42)(12x+10)}{(6)(2)}$$

$$=\frac{6(2x-7)2(6x+5)}{(6)(2)}$$

$$=(2x-7)(6x+5)$$

4.4.6 Diferencia y adición de cubos

Así como tenemos factorización para la diferencia de cuadrados, también tenemos para la diferencia y adición de cubos:

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

Solo faltarían algunos ejemplos para entender de forma más clara la diferencia y adición de cubos.

Ejemplo:

$$27-x^3=3^3-x^3=(3-x)\left(3^2+3x+x^2\right)=(3-x)\left(9+3x+x^2\right)$$

Actividad:

Resolver las siguientes factorizaciones:

$a.\ 9x^2 - 121$

$b.\ 6z^2 - 1 + z$

$c.\ 8a^3b^3 + 1$

$d.\ y^2 - 7y + 12$

$e.\ a^3 - 27$

$f.\ 4c^2 - d^2 - 6c - 3d$

$g.\ 2x^4 - x^3 + 11x^2$

$h.\ 9c^2 - 24cd + 16d^2$

$i.\ x^2 - z^4 + y^2 + 2xy$

$j.\ 49a^2 - 25$

$k.\ x^8 - x^4y^4$

$l.\ \dfrac{n - \dfrac{n^2}{n-m}}{1 + \dfrac{m^2}{n^2 - m^2}}$

$m.\ \dfrac{r^3 + 8}{r^2 + 4r + 4} \times \dfrac{r^2 - 2r}{8 - 27 - r^2} \div \dfrac{r^3 - 2r^2 + 4r}{r + 4}$

4.5 CONCLUSIÓN

Las expresiones algebraicas son la combinación de números, variables y signos de operación, siendo la base de las ecuaciones, cuya importancia radica en que sirven para modelar los sistemas matemáticos, en particular para plantear y resolver problemas en la ingeniería.

4.6 REFERENCIAS

Arévalo Ovalle, D. (2012). *Introducción a las matemáticas.* México D.F.: Grupo Editorial Patria.

5. Ecuaciones lineales y cuadráticas

5.1 PREFACIO

Uno de los problemas más comunes en la matemática es el de resolver una ecuación. En este capítulo, desarrollaremos los conceptos y las propiedades de las ecuaciones lineales y cuadráticas en una variable. Una ecuación es una proposición de igualdad entre dos expresiones algebraicas. Esta hace que la ecuación sea la herramienta más importante del álgebra, ya que en la resolución de problemas se involucran distintos tipos de ecuaciones lineales y cuadráticas.

5.2 CONCEPTOS BÁSICOS

Identidad: Es una igualdad que se satisface para cualquier valor de la variable. Son ejemplos de identidades:

$a)\ 2x+1=-\dfrac{6x+3}{-3}$ $\qquad b)\ (a+2)^2=a^2+4a+4$

$c)\ x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$

Observe que si se sustituye la variable en ambos lados de la igualdad por cualquier valor y se desarrollan las operaciones indicadas, la igualdad se cumple.

Ecuación: Es una igualdad que se satisface para determinados valores de la variable.

A continuación, algunos ejemplos de ecuaciones:

a) $2x+1=3$

Observe que solo se cumple la igualdad cuando $x=1$

b) $a^2+4a+4=0$

Observe que solo se cumple la igualdad cuando a = -2

c) $x^2-3x+2=0$

Observe que la igualdad se verifica solo cuando $x=2$ ó $x=1$

Resolver una ecuación consiste en establecer los valores de la incógnita que hacen que la igualdad sea verdadera.

5.3 ECUACIONES LINEALES

Son aquellas ecuaciones que pueden reducirse a la forma $ax+b=0$, con a ≠ 0. Observe que el exponente de la incógnita "x" es 1. Una ecuación de primer grado siempre admite una única solución, que será de la forma: $x=-\dfrac{b}{a}$

Resolver la ecuación $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{5-2x}{2}=\dfrac{x-1}{3}-1$

Las ecuaciones lineales de primer grado representan una herramienta de gran utilidad para la resolución de problemas referentes a la vida cotidiana.

Actividad:

- En una fiesta, el número de hombres duplica al de mujeres y la cuarta parte de ellas no saben bailar. Si hay 42 mujeres que bailan, ¿cuántas personas hay en la fiesta?
- El precio de una nevera se aumenta 35%. A continuación, se le hace un descuento del 20% y se vende en $81 000 pesos. ¿Cuál era el precio inicial de la nevera?
- Un grupo de 46 personas entre niños y adultos se dirigen al cine. Si las entradas de adultos cuestan 400 bolívares y las de niños, 300 bolívares, y en total pagaron 15 400 bolívares, ¿cuántos niños y cuantos adultos había en el grupo?

5.3.1 Ecuaciones lineales con dos variables

Una ecuación de la forma $Ax + By + C$ ó $y = Ax + B$ en donde A y B no son cero se llama ecuación lineal en x y y. Para simplificar, se expresa cualquier ecuación de este tipo de la forma $p\ (x,y) = 0$, que puede representarse gráficamente en el plano cartesiano.

Ejemplo: $y = 5x + 1$

Le damos cualquier valor a la variable x.

$x = 2 \Rightarrow y = 5(2) + 1 = 11 \quad p(2,11) = 0$

5.3.2 Ecuaciones lineales simultáneas con dos incógnitas

Un sistema de ecuaciones lineales con dos variables x y y consta de dos ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x + b_{12}y &= c_1 \\ a_{21}x + b_{22}y &= c_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Donde los coeficientes son $a_{11}, a_{21}, b_{12}, b_{22}, c_1, c_2$

La solución de este sistema es un par ordenado (x,y) que satisface ambas ecuaciones. Puesto que la gráfica de cada una de las ecuaciones de (1) es una recta, al buscar la solución, se están buscando en realidad los puntos que son comunes a ambas rectas, es decir, el punto de corte de las dos rectas si son secantes, esto es, si se cortan.

Para la solución de un sistema de ecuaciones lineales, se utilizan los métodos: gráfico, igualación, sustitución, eliminación o suma y resta, determinantes o matrices.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 4 &= 0 \\ x + 3y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Utilizamos el método de eliminación o de suma y resta. Podemos eliminar la x o la y. Si eliminamos la variable x, los coeficientes de las dos ecuaciones de la x deben ser el mismo valor, pero con signo contrario; por consiguiente, multiplicamos la segunda ecuación por -2:

$$-2\left(x + 3y - 1 = 0\right) \Rightarrow -2x - 6y + 2 = 0$$

Sumamos las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 2x + 5y - 4 = 0 \\ \underline{-2x - 6y + 2 = 0} \\ -\ \ y - 2 = 0 \end{array}$$

Entonces obtenemos $y = 2$

Este valor lo reemplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones y obtenemos el valor de x. En la primera:

$$2x + 5y - 4 = 0 \quad y = -2 \quad 2x + 5(-2) - 4 = 0$$
$$\Rightarrow \textit{despejando} \quad x = 7$$

Nota. Existen ecuaciones lineales simultáneas con tres, cuatro, etc., incógnitas.

5.4 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Son aquellas ecuaciones que pueden reducirse a la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$. Observe que el exponente de la incógnita "x" es 2. Resolver una ecuación de este tipo consiste en determinar los valores de la incógnita que satisfacen la igualdad. Para que una ecuación de segundo grado admita solución real, es necesario que se cumpla que la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$, también llamada *discriminante*, sea no negativa, es decir, $b^2 - 4ac \geq 0$. Para determinar las soluciones de una ecuación de segundo grado, se aplicará la expresión siguiente, denominada *fórmula para la solución de una ecuación cuadrática*:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La naturaleza de las soluciones de la ecuación de segundo grado puede determinarse analizando el discriminante, así:

a) Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales y diferentes.

b) Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales e iguales.

c) Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación no tiene soluciones reales.

Ejemplo:

Determinar la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones:

a. $x^2 - 5x + 6 = 0$

b. $x^2 - 10x + 25 = 0$

c. $x^2 + x + 1 = 0$

Solución:

Calculando el discriminante de la ecuación en cada caso, resulta:

a) $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 \Rightarrow \Delta > 0$ La ecuación tiene dos soluciones *reales* y *diferentes*.

b) $\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 100 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$ La ecuación tiene dos soluciones *reales* e *iguales*.

c) $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \Delta < 0$ La ecuación *no tiene solución real*.

Actividad:

- Un pedazo de alambre de 92 m de longitud se corta en dos pedazos, y con cada uno de ellos, se construye un cuadrado. Si la suma de las áreas de ambos cuadrados es 289 m^2, ¿cuál es la longitud de cada pedazo?
- Resolver las siguientes ecuaciones:

$$a)\ \left(x^2 - 3x + 4\right)^2 - 3\left(x^2 - 3x + 4\right) + 2 = 0$$

$$b)\ -\frac{4}{x-1} = \frac{7}{2-x} + \frac{3}{x+1}$$

- Carlos compró cierto número de carpetas en $ 7800, pero en otro negocio pagó la misma cantidad por 2 carpetas menos y cada una le costó $80 más. ¿Cuántas carpetas compró y cuánto pagó por cada una en el primer negocio?

5.5 CONCLUSIÓN

Un problema se resuelve con el uso de las ecuaciones lineales y cuadráticas, comprendiendo conceptos del álgebra lineal como, por ejemplo, análisis de circuitos hidráulicos y eléctricos, estructuras de redes, movilidad en el transporte y diseño estructural, entre otros, es decir, para desarrollar el modelo matemático de un fenómeno en ingeniería.

5.6 REFERENCIAS

Zill, D. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría*. México D. F.: Mc Graw Hill.

6. Conclusiones

Los conceptos básicos en matemáticas, entre ellos las operaciones de suma, resta, multiplicación, división; razones y proporciones; potenciación y radicación; álgebra básica; y ecuaciones lineales y cuadráticas, son las herramientas conceptuales que explican los fenómenos físicos en el campo de la ingeniería.

La habilidad para manipular las fracciones ayuda a repartir los pagos, el presupuesto diario en una obra civil, las cantidades de obra, la cantidad de datos en un día que se pueden relacionar en un aplicativo, etc., siempre partiendo de la unidad.

Las razones y las proporciones son utilizadas para comparar cantidades o para establecer la relación que debe existir entre ellas. Pueden utilizarse para relacionar los diferentes componentes en una mezcla en una construcción o en las proporciones entre materiales que se utilizan para realizar diferentes trabajos (por ejemplo, para diluir una pintura la relación diluyente-pintura debe estar en la razón 1:3).

La potenciación y la radicalización son utilizadas por los ingenieros para asociar las soluciones y los problemas concretos, creando modelos matemáticos que les permitan analizar y obtener potenciales soluciones de diversas situaciones de la ingeniería.

Las expresiones algebraicas son la combinación de números, variables y signos de operación, siendo la base de las ecuaciones cuya importancia radica en que sirven para modelar los sistemas matemáticos, en particular para plantear y resolver problemas en la ingeniería.

Un problema se resuelve con el uso de las ecuaciones lineales y cuadráticas, comprendiendo conceptos del álgebra lineal como, por ejemplo, el análisis de circuitos hidráulicos y eléctricos, las estructuras de redes, la movilidad en el transporte y el diseño estructural, entre otros; es decir, para desarrollar el modelo matemático de un fenómeno en ingeniería.