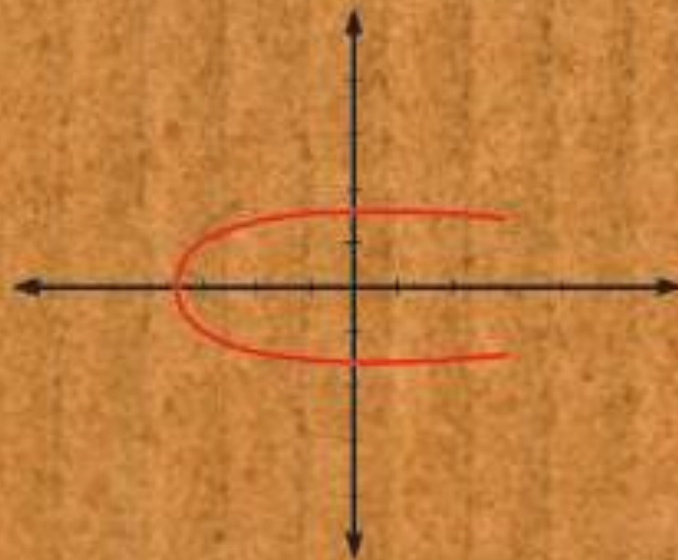
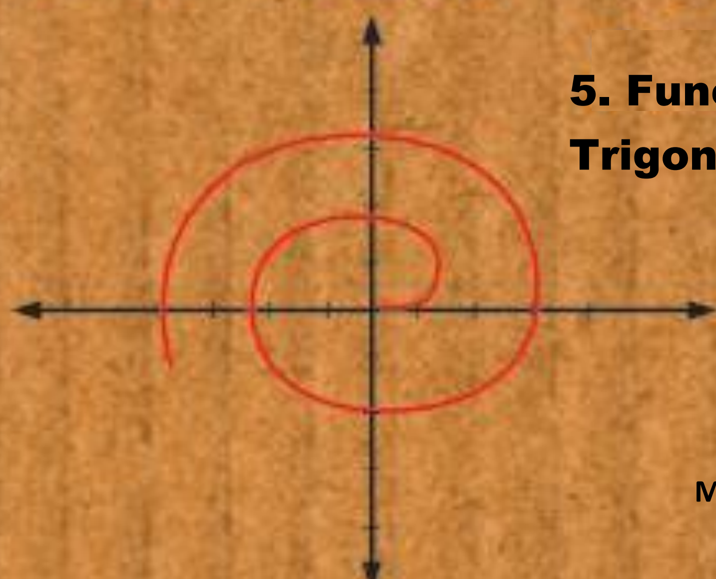


Cálculo



5. Funciones Trigonométricas

Mtra. Zenaida Avila Aguilar

Universidad
Veracruzana

RECOMENDACIONES GENERALES PARA EL PROFESOR

Pondrá énfasis en el trabajo que los alumnos desarrollarán en el aula. Esto supone aclarar a los estudiantes que deberán realizar, como trabajo extra escolar de cada a sesión, las actividades que se describen a continuación:

Resolver un problema que no haya sido resuelto en el aula a lo largo de las sesiones. El problema puede ser elegido de la lista de problemas a ser resueltos como trabajo individual que aparece al final de la sesión.

Construir y resolver un problema que requiera la aplicación de los conceptos dados en la sesión y que esté relacionado con su área de estudio de interés.

Describir el proceso que han seguido para verificar el resultado del problema que haya resuelto. Consideramos necesario que el profesor o el monitor programe, en cada sesión, las siguientes actividades:

Intervención del profesor, exposición de los estudiantes, trabajo en equipo, trabajo individual y discusión.

A continuación, describimos brevemente cada una de las actividades que mencionamos en el párrafo anterior. Cabe mencionar que el orden en que las presentamos, no guarda relación con su importancia.

La descripción de las mencionadas actividades no supone que deban realizarse exhaustivamente en una clase de 50 minutos.

Intervención del profesor

Las intervenciones del profesor, al introducir un tema, han de ser cortas. En todo caso, han de producirse con la finalidad de orientar a los estudiantes en aspectos concretos como:

a) Establecer los objetivos particulares.

b) Describir la forma de organizar el trabajo de los equipos y en el aula.

c) Explicar procedimientos, hechos o heurísticas que permitan a los estudiantes avanzar en la resolución de un problema.

Exposiciones de los estudiantes

Las intervenciones de los estudiantes pueden ser de manera individual o por equipos para:

a) Presentar sus argumentos.

b) Dirimir ideas que puedan parecer contrarias entre uno o más miembros del equipo.

c) Presentar el proceso de resolución de un problema.

d) Presentar el proceso de resolución de algún problema dado como trabajo extra escolar;

e) Presentar trabajos o tareas a desarrollar fuera del aula.

Trabajo en equipo

Los equipos podrán integrarse con dos o tres estudiantes. El trabajo en equipo tiene como propósito proporcionar a los estudiantes un contexto más o menos estable y continuo para enfrentar colectivamente la resolución de problemas. Se sugiere dedicar a esta actividad el tiempo suficiente en cada sesión para resolver los problemas planteados.

Trabajo individual

El trabajo individual tiene como propósito evaluar el trabajo de cada estudiante fuera de la sesión. La frecuencia y grado de participación puede obtenerse a partir de la participación individual en el aula o, bien, a partir de los reportes escritos que formen parte del portafolio de trabajo de cada estudiante.

Discusión general

Esta actividad ha de permitir a los estudiantes escuchar y valorar las preguntas y comentarios de sus compañeros; corregir errores cometidos en el proceso de resolución de un problema o aprender a sustentar sus ideas.

El trabajo cotidiano consiste, fundamentalmente, en la resolución de problemas de diferentes grados de dificultad. Así, la colección de problemas que proponemos puede facilitar el propósito del profesor

ESTÁNDARES PARA LA PRÁCTICA MATEMÁTICA DEL COMMON CORE STATE STANDARDS FOR MATHEMATICS (CCSSM)

Para saber cuáles son los aprendizajes que se promueven en cada situación didáctica, nos basaremos en los ocho Estándares para la Práctica Matemática de las Funciones establecidas en el Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM) para el nivel universitario. Estos estándares pueden ser considerados como elementos fundamentales de la resolución de problemas matemáticos:

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

PM.4 Modelar con las matemáticas.

PM.5 Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.

PM.6 Asista a la precisión.

PM.7 Buscar y hacer uso de la estructura.

PM.8 Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido. (CCSSI 2010)

UNIDAD 5: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

SESIÓN 1: FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Estándares del CCSSM que se promueven:

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

PM.4 Modelar con las matemáticas.

PM.5 Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.

PM.6 Asista a la precisión.

PM.7 Buscar y hacer uso de la estructura.

Competencias específicas:

En esta sesión el estudiante:

1. Reconoce una función trigonométrica (seno y coseno) en cualquier representación y contexto

2. Amplía, cambia el periodo y la posición de una onda senoidal y cosenoidal.

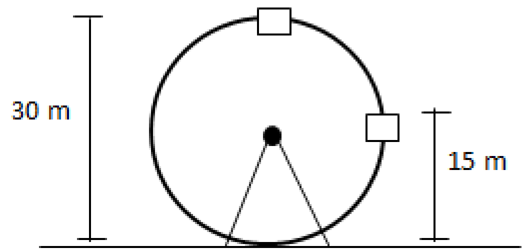
3. Determina la función que modela la gráfica de una onda senoidal y cosenoidal.

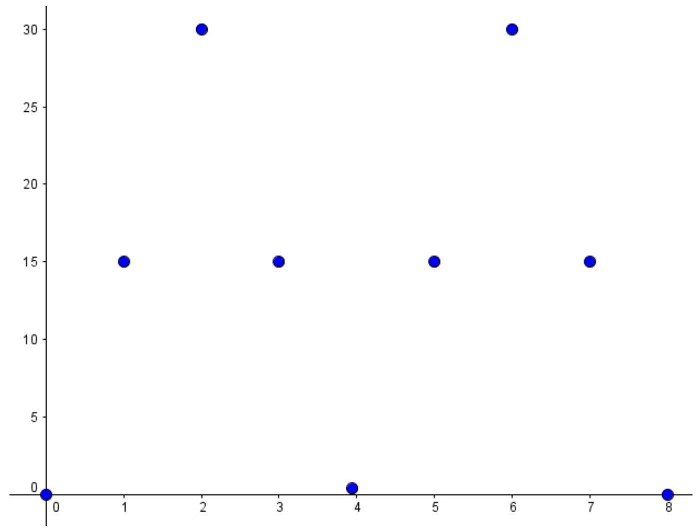
4. Modela situaciones de la vida real que se comporta de forma senoidal *y cosenoidal.*

Situación 1.1: María se sube a la rueda de la fortuna de 30m de altura en Six Flags. Si se sabe que la rueda tarda 4 minutos en dar un giro completo, determina una gráfica que modele la altura de María en el tiempo t, después de 2 giros. ¿Qué tipo de función crees que es?

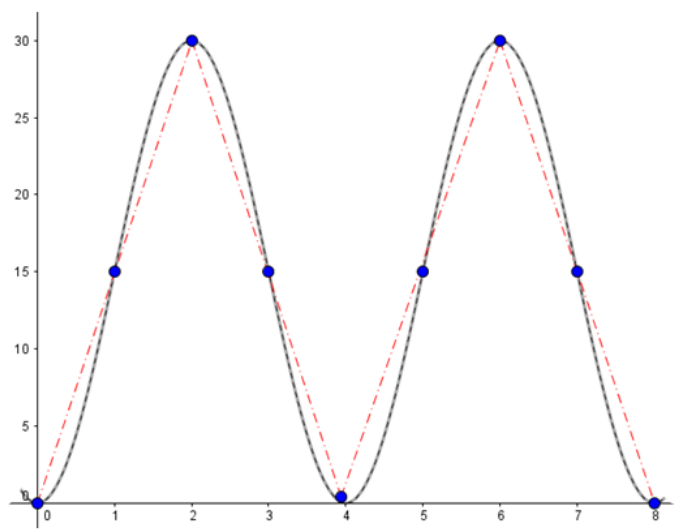
Respuesta 1.1: Apoyar a los estudiantes para que observen que pueden fraccionar el tiempo y obtener las alturas que va registrando en los 2 giros, es decir 8 minutos

Tiempo (minutos)	Altura (metros)
0	0
1	15
2	30
3	15
4	0
5	15
6	30
7	15
8	0





Nota al profesor: Por intuición, algunos estudiantes dirán que los puntos se unen por líneas rectas y otros por ondas (ver la gráfica de abajo), pero requieren recursos de trigonometría para poder obtener los valores de las alturas en otros puntos de la rueda y observen que la gráfica que modela las alturas es una onda, por lo tanto, se necesita hacer el siguiente repaso en la situación 1.2



Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder determinar cuál es la gráfica que modela la altura de María en la rueda de la fortuna, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir de los cálculos realizados y sus intuiciones. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* Los estudiantes modelarán la altura de María en la rueda de la fortuna a través de una gráfica.

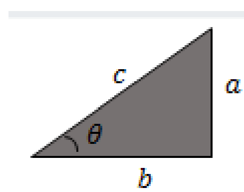
PM.5 *Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.* Los estudiantes deberán utilizar las herramientas adecuadas para determinar el tiempo que tarda la rueda en pasar por distintos puntos de la rueda de la fortuna y obtener la altura. Deben darse cuenta que requieren herramientas de la trigonometría para encontrar más puntos, sino intuirán que la situación es modelada por rectas.

PM.6 *Asista a la precisión.* El estudiante debe ser preciso al determinar paralelamente una fracción de tiempo con la posición de la rueda para que no encuentre una gráfica errónea.

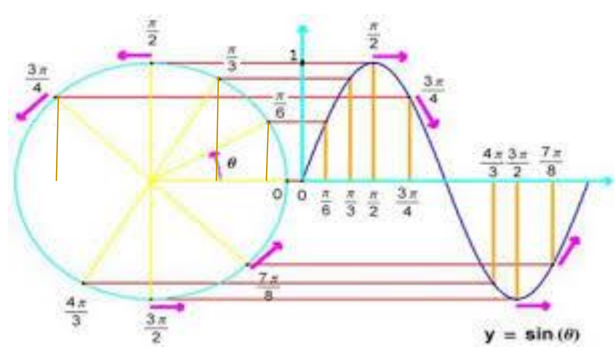
Situación 1.2: Antes de iniciar es importante recordar las siguientes definiciones (también se puede ver el video: https://www.youtube.com/watch?v=aHEXgPU__e4):

Considere el triángulo rectángulo con lados a y b e hipotenusa c. Si θ es el ágTulo entre la hipotenusa y el lado b se define el siguiente cociente como la función seno:

$$sen\ (\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

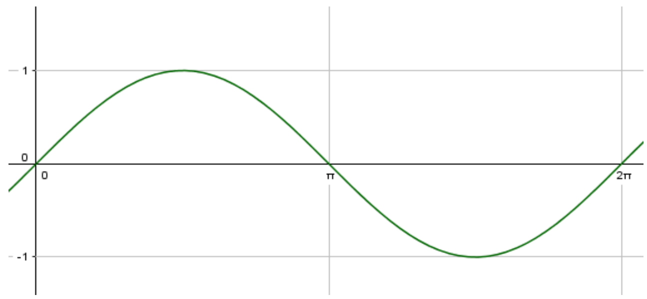


Considere una circunferencia de radio 1 y coloque el triángulo rectángulo con hipotenusa $c = 1$ (es decir, $sen\ (\theta) = \frac{a}{1} = a$). Observe que si aumenta el valor del ángulo θ de 0 a $\frac{\pi}{2}$ radianes, el valor del $sen\ (\theta)$ aumenta de 0 hasta 1:



La longitud del cateto a disminuye hasta llegar a 0 conforme θ avanza de $\frac{\pi}{2}$ a π. Conforme el ángulo θ va de π a $\frac{3\pi}{2}$ la función $sen\,(\theta)$ disminuye de 0 a -1. Finalmente de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π la función aumenta de -1 a 0.

Es decir, la gráfica siguiente es modelada por la función $y = sen\,(\theta)$



Pueden aplicarse diversas operaciones de escala y traslación a la onda y obtener la función senoidal que la modela, por ejemplo:

Compara cada una de las siguientes funciones usando el software Desmos.

a) $f(x) = sen(x)$
b) $h(x) = 2sen(x)$
c) $g(x) = 5sen(x)$
d) $d(x) = 8sen(x)$

¿Qué notaste? Para cualquier función $f(x) = Bsen(x)$, ¿qué movimiento le hace B a la onda? ¿De qué tamaño es el movimiento?

Respuesta 1.2: B cambia la amplitud de la onda, va de B a $-B$, así que tiene tamaño $2B$

Nota al profesor: El estudiante puede tener conflictos con la palabra “amplitud” ya que normalmente se asocia a lo “amplio” o “ancho” de algo, en este caso medir la amplitud de una onda no se hace de forma horizontal sino vertical.

Situación 1.3: Compara cada una de las siguientes funciones usando el software Desmos.

a) $f(x) = sen(x)$
b) $h(x) = 2 + sen(x)$
c) $g(x) = 5 + sen(x)$
d) $d(x) = -3 + sen(x)$

¿Qué notaste? Para cualquier función $f(x) = C + sen(x)$, ¿qué movimiento le hace C a la onda?

Respuesta 1.3: C desplaza la onda sobre el eje y (verticalmente), para que la segunda coordenada del punto central del origen de la onda sea C

Situación 1.4: Compara cada una de las siguientes funciones usando el software Desmos.

a) $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
b) $h(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
c) $g(x) = sen(x - \pi)$
d) $d(x) = sen(x + 5)$

¿Qué notaste? Para cualquier función $f(x) = sen(x - D)$, ¿qué movimiento le hace D a la onda?

Respuesta 1.4: D desplaza la onda sobre el eje x (horizontalmente), para que la primera coordenada del punto central del origen de la onda sea D. Si D es positivo se desplaza a la derecha, si es negativo, a la izquierda.

Nota al profesor: El estudiante puede confundirse con el valor del parámetro D, es importante que quede bien claro que D puede ser negativo o positivo, así como también $-D$ puede ser negativo o positivo, dependerá del valor de D.

Situación 1.5: Compara cada una de las siguientes funciones usando el software Desmos.

a) $f(x) = sen(x)$
b) $h(x) = sen(2x)$
c) $g(x) = sen(4x)$
d) $d(x) = sen(10x)$

¿Qué notaste? Para cualquier función $f(x) = sen(Ax)$, ¿qué movimiento le hace A a la onda? ¿De qué tamaño es el movimiento?

Respuesta 1.5: A es llamada la frecuencia, cambia el tamaño del periodo de la onda. El periodo será de tamaño $\frac{2\pi}{A}$, es por eso que entre más grande sea A más pequeño es el periodo.

Nota al profesor: El profesor podrá explicar que el periodo de una onda es el tiempo que tarda en completar la longitud de onda (pasando por su máximo y su mínimo).

Situación 1.6: Generalizando las situaciones anteriores, explica cómo es la gráfica de

$f(x) = C + Bsen\,A(x - D)$

Respuesta 1.6: La amplitud de la onda es $2B$, el periodo es de tamaño $\frac{2\pi}{A}$, su punto central desplazada verticalmente una distancia C, y desplazada horizontalmente una distancia D, es decir, se localiza en el punto (D, C).

Nota al profesor: Se les puede encargar de tarea a los alumnos, que hagan el mismo análisis para el coseno. Observarán que a los parámetros les pasa exactamente lo mismo que los del seno; podrán notar que el coseno es la misma gráfica que la del seno, excepto por una traslación del punto central del origen hacia la izquierda de $\frac{\pi}{2}$, si no lo observan, se les puede hacer preguntas como por ejemplo, ¿puede la gráfica del coseno modelarse con la del seno?, ¿Cómo es la expresión algebraica que los iguala?, etc.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM (situaciones 1.2 a la 1.6)

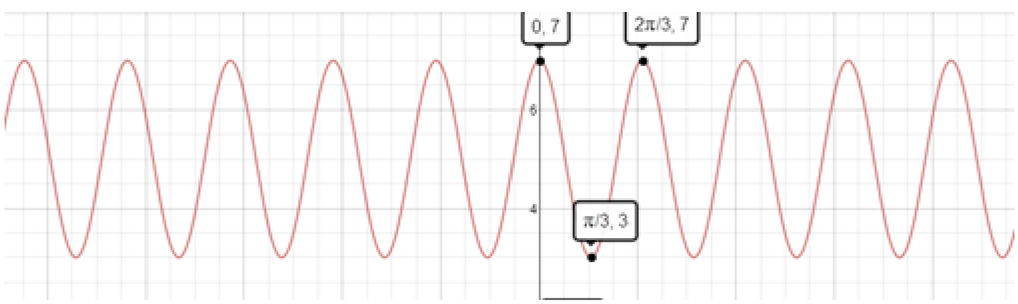
PM.5 *Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.* Las situaciones 1.2 a 1.5 requieren que los estudiantes aíslen cuidadosamente cada uno de los cuatro parámetros de la forma estándar de una función senoidal. Los estudiantes harán "uso apropiado herramientas estratégicas" para posteriormente verlas de manera conjunta en la situación 1.6

PM.6 *Asista a la precisión.* El estudiante debe tener bien claro que por ejemplo, D puede ser negativo o positivo, así como también $-D$ puede ser negativo o positivo, dependerá del valor de D. Se debe ser muy preciso para no llegar a obtener a funciones erróneas.

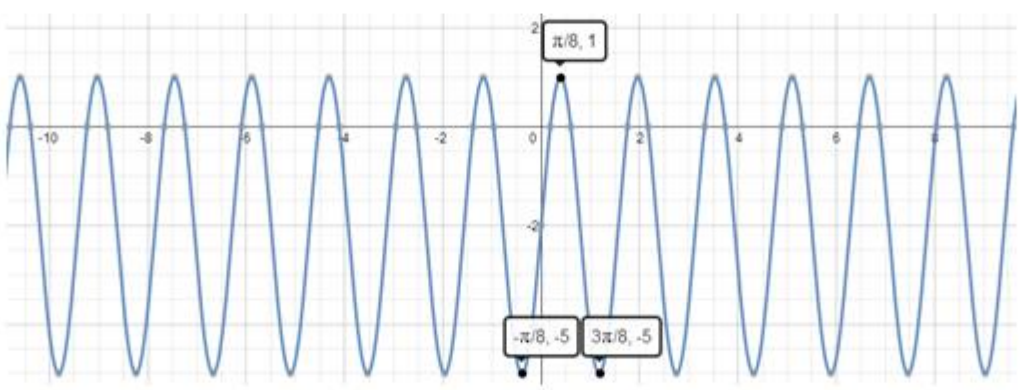
PM.7 *Buscar y hacer uso de la estructura.* Mediante las generalizaciones descubiertas de manera aislada a través de las situaciones 1.2 a 1.5 para el ajuste de una función senoidal, los estudiantes deberán "buscar y hacer uso de estructuras" para hacer una generalización de manera conjunta de la forma función seniodal y poder aplicarla en las situaciones posteriores.

Situación 1.7: Observa las siguientes gráficas y determina cuál es la función trigonométrica que modela a cada una.

a)



b)



Respuesta 1.7: a) $5 + 2sen\,3(x - \frac{\pi}{2})$ **b)** $-2 + 3sen\,(4x)$

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* La manera de darle sentido a este problema es que los estudiantes se den cuenta que pueden aplicar la generalización hecha en las situaciones anteriores para ajustar una gráfica específica dada, mediante una función senoidal.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Los estudiantes deberán razonar lo aprendido de manera general en las situaciones anteriores para practicarlo cuantitativamente en esta situación.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder encontrar cuál es la expresión algebraica que modela la gráfica dada, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir de la aplicación de la generalización que se hizo en las situaciones anteriores acerca de la función senoidal. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* Los estudiantes modelarán la gráfica dada mediante la función senoidal que se ajuste a dichos datos.

Situación 1.8: La empresa Apple registra la utilidad $\mathrm{U}(x)$ en miles de dólares obtenida por la cantidad x de iPhone5 vendidos en México y los registra en una tabla como sigue:

x	7,000	8,000	9,000	10,000	11,000	12,000	13,000
$\mathrm{U}(x)$	\$41,000	\$46,000	\$49,000	\$50,000	\$49,000	\$46,000	\$41,000

Determina la función $\mathrm{U}(x)$ que modela la utilidad de cualquier cantidad x de iPhone5 vendidos

Respuesta 1.8: Haciendo las segundas diferencias de $f(x)$ se puede observar que es una función cuadrática. La utilidad máxima se obtiene cuando se venden 10, 000 iPhone5 y es de 50,000 es decir, $h = 10000, k = 50000$ y cualquier otro punto (9000, 49000) se puede obtener la función cuadrática:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

$$49000 = a(9000 - 10000)^2 + (50000)$$

$$49000 = a(1000)^2 + 50000$$

$$1000000a = 49000 - 50000$$

$$1000000a = -1000$$

$$a = -\frac{1}{1000}$$

Así la función es: $f(x) = -\frac{(x-10000)^2}{1000} + 50000$

Nota al profesor: Esta situación está hecha para que el estudiante repase los conocimientos de las unidades anteriores y para que no se confíe que todos los problemas serán específicos de la unidad.

Situación 1.9[1]: La temperatura media en grados Fahrenheit en cada mes en la ciudad de Xalapa a través de un tiempo de 30 años 1983-2013 es la siguiente

Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
48.9	51.8	59.2	66.0	73.5	79.1	81.8	81.0	76.6	67.3	59.1	51.7

Si se etiqueta a Enero como x=0, Febrero como x=1, así sucesivamente, este modelo de la temperatura media mensual puede ser ajustado con una curva senoidal. Localiza los puntos en Desmos.

a) ¿De qué tamaño es el periodo? ¿Cuál es valor de A?
b) ¿Cómo obtienes C? ¿Cuál es el valor?
c) ¿Cómo obtienes B? ¿Cuál es su valor?
d) ¿Cómo obtienes D? ¿Cuál es su valor?
e) De lo anterior ¿cuál es la función que modela temperatura media mensual de Xalapa?
f) Determina la función que permite obtener los meses x del año en los que se tiene cierta temperatura promedio

Respuesta 1.9:

a) El periodo es de tamaño 12, entonces $\frac{2\pi}{A} = 12$, así $A = \frac{\pi}{6}$.

b) C se obtiene sacando la distancia del punto máximo al punto mínimo y dividirla entre 2, entonces $C = \frac{1}{2}(81.8 + 48.9) = 65.35$;

c) B es la distancia del centro al punto máximo o mínimo, es decir 16.45.

d) D es el punto medio de los puntos x en donde se localiza el máximo y el mínimo, es decir en $x = 0$ y $x = 6$, así $D = 3$.

e) $f(x) = 65.35 + 16.45\, sen\, \frac{\pi}{6}(x - 3)$

f) Se requiere la función inversa, por lo tanto hay que despejar a x de $y = 65.35 + 16.45\, sen\, \frac{\pi}{6}(x - 3)$

$$y - 65.35 = 16.45\, sen\, \frac{\pi}{6}(x - 3)$$

$$\frac{y - 65.35}{16.45} = sen\, \frac{\pi}{6}(x - 3)$$

[1] Situación tomada y adaptada del libro ***Implementing the Common Core State Standards through Mathematical Problem Solving*** *de la NCTM p.32*

$$sen^{-1}\left(\frac{y-65.35}{16.45}\right) = \frac{\pi}{6}(x-3)$$

$$\frac{6}{\pi}sen^{-1}\left(\frac{y-65.35}{16.45}\right) = x-3$$

$$x = \frac{6}{\pi}sen^{-1}\left(\frac{y-65.35}{16.45}\right) + 3$$

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* La manera de darle sentido a este problema es usando datos de una situación real, lo que los motivará acerca de la aplicación que tiene lo que están aprendiendo en situaciones contextualizadas.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Los estudiantes deberán razonar lo aprendido de manera general en las situaciones anteriores para practicarlo cuantitativamente en esta situación.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder encontrar cuál es la expresión algebraica que modela los datos de la temperatura, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir de la aplicación de la generalización que se hizo en las situaciones anteriores acerca de la función senoidal. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* Los estudiantes modelarán los datos de las temperaturas dadas mediante la función senoidal que se ajuste a dichos datos.

Situación 1.10: Use la función exponencial para hallar x.

a) $\log_4 1024 = x$

b) $\log_x 8 = \frac{4}{3}$

Respuesta 1.10:

a) Lo que se quiere es encontrar el exponente al que se debe elevar la base 4 tal que nos dé como resultado 1024

$$4^x = 1024$$

Entonces $x = 5$, $4^5 = 1024$

b) Lo que se quiere es encontrar la base tal que elevada a la $\frac{4}{3}$ nos dé como resultado 8

$$x^{\frac{4}{3}} = 8$$

$$x = 8^{\frac{3}{4}}$$

$$x = 4.7568$$

Nota al profesor: Esta situación está hecha para que el estudiante repase los conocimientos de las unidades anteriores y para que no se confíe que todos los problemas serán específicos de la unidad.

Situación 1.11: Carlos quiere hacer una inversión y el banco le da una tabla que contiene la cantidad invertida y el monto que obtiene con un interés simple anual. Observa qué tipo de función modela la tabla y determina cuál es esa función.

inversión	1000	3000	10000	25000
Monto obtenido	1012	3036	10120	25300

Respuesta 1.11: Es una función lineal porque el cambio promedio es $m = 1.012$, para encontrar la intersección con el eje y usamos otro punto de la tabla $(10000{,}10120)$:

$$f(x) = 1.012x + b$$

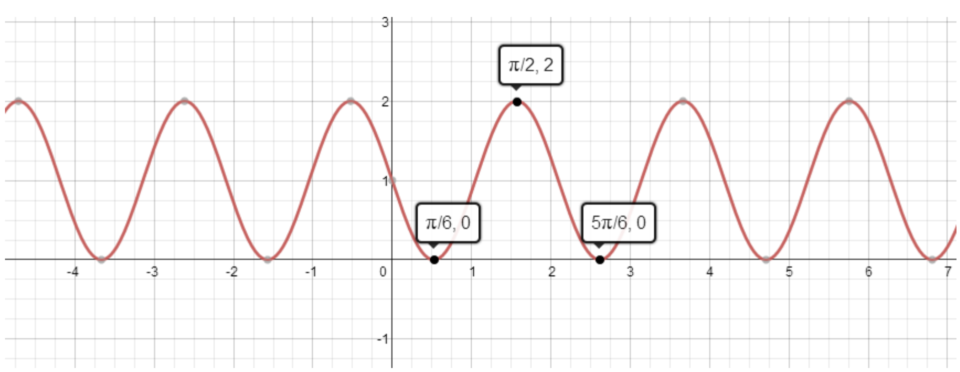
$$10120 = 1.012(10000) + b$$

$$b = 10120 - 10120 = 0$$

Así $f(x) = 1.012x$

PROBLEMAS PERSONALES

Situación 1.1P: Observa la siguiente gráfica y determina cuál es la función trigonométrica que la modela.



Situación 1.2P: Dibuja la gráfica de cada función trigonométrica dada (sin usar Desmos).

a) $2sen(x + 3)$
b) $6 + \ sen\, 3(x - 2)$

Situación 1.3P: El 19 de septiembre de 1985 se produjo un sismo en México que causó gran destrucción en el país, especialmente en el DF. La UNAM ha trabajado intensamente en el estudio de este lamentable fenómeno, según datos de expertos se presentó un movimiento prácticamente armónico de 2 segundos de periodo y una duración aproximada de 2 minutos, durante este tiempo la magnitud del terremoto estuvo oscilando entre 7.8 y 8.2 grados de la escala de Richter. ¿Cuál es la función que modela el comportamiento del terremoto? Dibújalo.