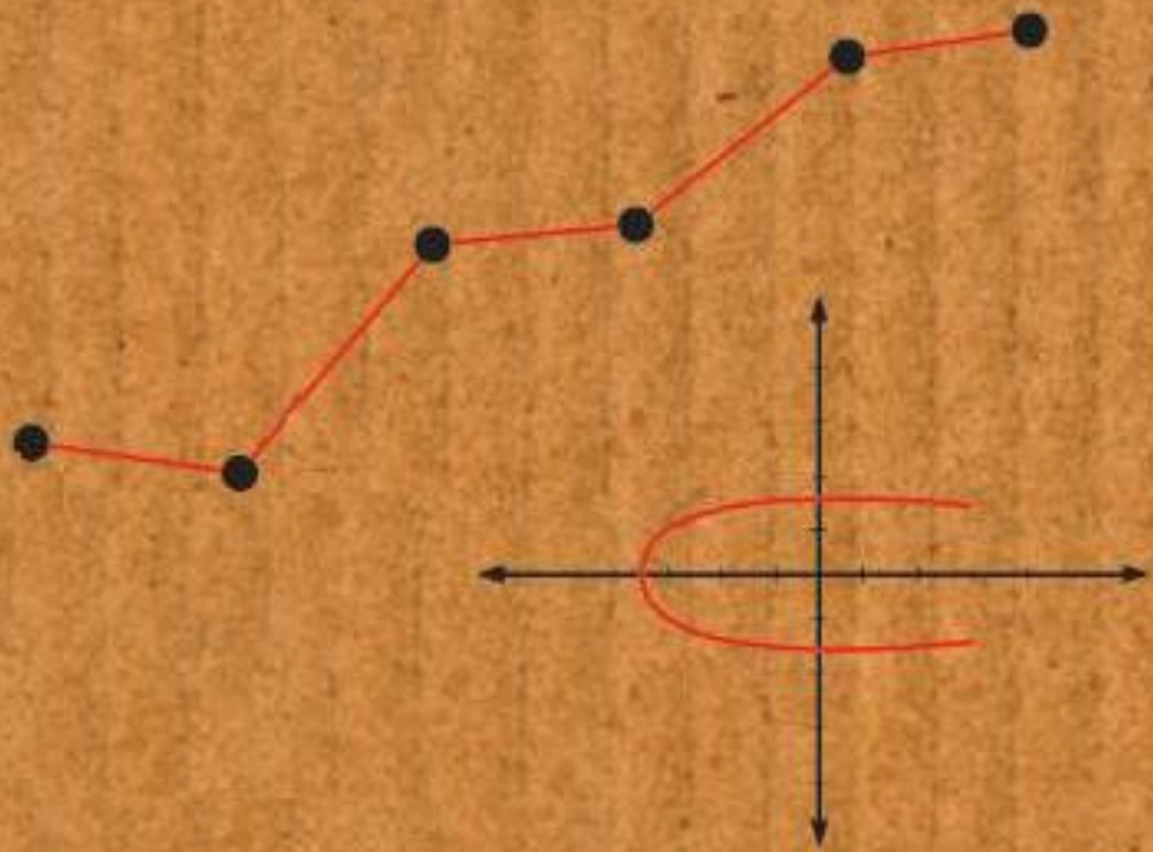


Cálculo

4. Funciones logarítmicas y exponenciales

Mtra. Zenaida Avila Aguilar

Universidad Veracruzana

RECOMENDACIONES GENERALES PARA EL PROFESOR

Pondrá énfasis en el trabajo que los alumnos desarrollarán en el aula. Esto supone aclarar a los estudiantes que deberán realizar, como trabajo extra escolar de cada a sesión, las actividades que se describen a continuación:

Resolver un problema que no haya sido resuelto en el aula a lo largo de las sesiones. El problema puede ser elegido de la lista de problemas a ser resueltos como trabajo individual que aparece al final de la sesión.

Construir y resolver un problema que requiera la aplicación de los conceptos dados en la sesión y que esté relacionado con su área de estudio de interés.

Describir el proceso que han seguido para verificar el resultado del problema que haya resuelto. Consideramos necesario que el profesor o el monitor programe, en cada sesión, las siguientes actividades:

Intervención del profesor, exposición de los estudiantes, trabajo en equipo, trabajo individual y discusión.

A continuación, describimos brevemente cada una de las actividades que mencionamos en el párrafo anterior. Cabe mencionar que el orden en que las presentamos, no guarda relación con su importancia.

La descripción de las mencionadas actividades no supone que deban realizarse exhaustivamente en una clase de 50 minutos.

Intervención del profesor

Las intervenciones del profesor, al introducir un tema, han de ser cortas. En todo caso, han de producirse con la finalidad de orientar a los estudiantes en aspectos concretos como:

a) Establecer los objetivos particulares.

b) Describir la forma de organizar el trabajo de los equipos y en el aula.

c) Explicar procedimientos, hechos o heurísticas que permitan a los estudiantes avanzar en la resolución de un problema.

Exposiciones de los estudiantes

Las intervenciones de los estudiantes pueden ser de manera individual o por equipos para:

a) Presentar sus argumentos.

b) Dirimir ideas que puedan parecer contrarias entre uno o más miembros del equipo.

c) Presentar el proceso de resolución de un problema.

d) Presentar el proceso de resolución de algún problema dado como trabajo extra escolar;

e) Presentar trabajos o tareas a desarrollar fuera del aula.

Trabajo en equipo

Los equipos podrán integrarse con dos o tres estudiantes. El trabajo en equipo tiene como propósito proporcionar a los estudiantes un contexto más o menos estable y continuo para enfrentar colectivamente la resolución de problemas. Se sugiere dedicar a esta actividad el tiempo suficiente en cada sesión para resolver los problemas planteados.

Trabajo individual

El trabajo individual tiene como propósito evaluar el trabajo de cada estudiante fuera de la sesión. La frecuencia y grado de participación puede obtenerse a partir de la participación individual en el aula o, bien, a partir de los reportes escritos que formen parte del portafolio de trabajo de cada estudiante.

Discusión general

Esta actividad ha de permitir a los estudiantes escuchar y valorar las preguntas y comentarios de sus compañeros; corregir errores cometidos en el proceso de resolución de un problema o aprender a sustentar sus ideas.

El trabajo cotidiano consiste, fundamentalmente, en la resolución de problemas de diferentes grados de dificultad. Así, la colección de problemas que proponemos puede facilitar el propósito del profesor

ESTÁNDARES PARA LA PRÁCTICA MATEMÁTICA DEL COMMON CORE STATE STANDARDS FOR MATHEMATICS (CCSSM)

Para saber cuáles son los aprendizajes que se promueven en cada situación didáctica, nos basaremos en los ocho Estándares para la Práctica Matemática de las Funciones establecidas en el Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM) para el nivel universitario. Estos estándares pueden ser considerados como elementos fundamentales de la resolución de problemas matemáticos:

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

PM.4 Modelar con las matemáticas.

PM.5 Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.

PM.6 Asista a la precisión.

PM.7 Buscar y hacer uso de la estructura.

PM.8 Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido. (CCSSI 2010)

ÍNDICE

UNIDAD 4: FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

UNIDAD 4: FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

SESIÓN 1: FUNCIONES EXPONENCIALES

Estándares del CCSSM que se promueven:

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

PM.4 Modelar con las matemáticas.

PM.5 Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.

PM.6 Asista a la precisión.

PM.7 Buscar y hacer uso de la estructura.

PM.8 Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido

Competencias específicas:

En esta sesión el estudiante:

1. Distingue una función exponencial de otra que no lo es

2. Reconoce una función exponencial representada en una tabla, en una gráfica o en situaciones verbales contextualizadas y no contextualizadas

3. Distingue el dominio y el rango de una función exponencial

4. Modela situaciones de la vida real que se comportan de manera exponencial

Situación 1.1: Un nuevo juego que descargó en su celular consiste en pasar por distintos niveles de dificultad, por lo que en cada uno le dará una puntuación. Al iniciar jugando le regalan un punto, en el primer nivel gana 2 puntos, en el segundo nivel 4 puntos, en el tercero 8, en el cuarto 16 y en el quinto nivel 32 puntos.

a) ¿Considera que esta situación es una función? ¿por qué?
b) Si es una función, ¿cuál es el dominio y el rango? Encuentre sus conjuntos.
c) ¿De qué depende que gane puntos?
d) ¿Será una función lineal? ¿por qué?
e) ¿Será una función cuadrática? ¿por qué?

Respuesta 1.1:

a) La situación es una función ya que a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo uno elemento del rango.

b) $\text{Dominio } = \{0,1,2,3,4,5\}$ y $\text{Rango} = \{1,2,4,8,16,32\}$

c) La ganancia de puntos depende de pasar de nivel.

d) No es una función lineal y una posible respuesta de ¿Por qué? Es que la razón de cambio no es constante.

e) No es una función cuadrática. Las posibles respuestas del porqué, podrían ser que la segunda razón de cambio no es constante o que las segundas diferencias de la función no son constantes.

Nota para el profesor: Debe tomarse en cuenta que habrá grupos de estudiantes que afirmen que es una función cuadrática por lo que se sugiere que los exhorte a verificar su afirmación.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Al tratarse de un juego para el celular del estudiante se espera que sea de su interés y que al empezar a cuestionarlo sobre el concepto de función le sea familiar y continúe con la siguiente pregunta que plantea la situación.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* El estudiante tiene que recurrir a las definiciones de función, dominio y rango, y para llegar a la conclusión que no es una función lineal ni cuadrática al proceso para deducirlo, por lo que debe razonar de manera abstracta y cualitativamente.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Cuando responde a la pregunta del porque es una función, si es lineal o no, si es cuadrática o no, el estudiante deberá construir argumentos que le permitan defender sus respuestas cuando exponga a su grupo, ser crítico con su razonamiento y hacer lo mismo con el de otros compañeros.

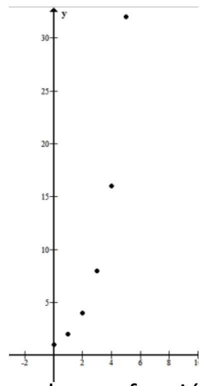
Situación 1.2: La siguiente tabla muestra los niveles ganados con los puntos acumulados, descrita en la situación 1.1.

Nivel (n)	0	1	2	3	4	5
Puntos ganados $P(n)$	1	2	4	8	16	32

Tabla 1

a) Grafica los puntos $(n, P(n))$ de la tabla.
b) ¿Qué operaciones realizas para obtener los puntos que se ganan en el octavo nivel?
c) Represente las operaciones para obtener cada valor $P(n)$ de la tabla, considerando todos los valores anteriores representados. ¿observa alguna relación entre estas representaciones? ¿cuál?
d) ¿Cuántos puntos ganará en el nivel 32?
e) Represente algebraicamente el total de puntos $P(n)$ que ganarías al final de cualquier nivel n.

Respuesta 1.2:
a) Si se dan los puntos de la tabla la gráfica debería ser:



A simple vista se puede decir que se trata de una función cuadrática, pero no es cuadrática porque las segundas diferencias no son constantes, por lo que hasta aquí no se sabe qué tipo de función es.
b) En el octavo nivel se tendrán 256 puntos. Pueden ser dos posible operaciones realizadas por el estudiante que la relación del número de puntos en un aumento de nivel es el doble de lo que había en el anterior o que el octavo nivel se obtenga elevando el número 2 a la potencia 5 y cualquiera es correcta.

c)

Nivel (n)	1	2	3	4	5
Puntos ganados $P(n)$	2	2(2)	2(2)(2)	2(2)(2)(2)	2(2)(2)(2)(2)

Sí, que se repite el 2 multiplicándose varias veces

d) 4,294,967,296

e) $\mathrm{P(n)} = 2^{\mathrm{n}}$

Nota al profesor: Se debe guiar al estudiante para que obtenga el resultado directamente.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Debe comprender el concepto de factor de cambio y generalizar la función, por lo que debe razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* Al graficar los puntos dados en una gráfica, el estudiante debe notar que de seguir con la tendencia de estos puntos la gráfica le podría quedar una curva y no sólo los puntos, pero también algebraicamente generaliza su función, por lo que está modelando el comportamiento de función.

PM.*7 Buscar y hacer uso de la estructura.* Observando el comportamiento de la función en cada uno de los puntos, se nota la forma en que va cambiando, la estructura que tiene, por lo que el estudiante tiene que hacer uso de las leyes de los exponentes para generalizar la función a una forma exponencial.

PM.8 *Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido.* El estudiante debe notar que el factor de cambio se repite en cada uno de los puntos, deduciendo la manera de incluirlo en una función general.

Situación 1.3: Las funciones exponenciales tienen la forma matemática siguiente:

$$y = b^c$$

Donde b se conoce como base y c como exponente. Generalmente, la base es un valor constante y el exponente es variable. En diversas aplicaciones de ciencia e ingeniería se pueden obtener conjuntos de datos que se presentan en forma tabular, tales como los siguientes:

Tiempo	Posición
0	1.09
1	2.76
2	7.41
3	20.12
4	54.61
5	148.46
6	403.45
7	1096.63
8	2981.04
9	8103.16
10	22026.01

a) ¿Puedes identificar la variable dependiente y la independiente en el modelo exponencial $y = b^c$?
b) ¿Qué falta conocer del modelo?
c) ¿Puedes calcularlo considerando un par de datos de la tabla? En caso de complicaciones ver la Nota al profesor.
d) ¿Qué sucede con el cálculo si consideras otros datos de la tabla?
e) ¿Te es familiar este valor?

Respuesta 1.3:

En la tabla se observa que para diversas propuestas de bases b, las que producen un error más pequeño entre la "y" y la "y_estimada" es b aprox. $2.718 = e$.

$\boldsymbol{c}$ tiempo	$\boldsymbol{y}$		Base_prop $\boldsymbol{b}$	y_estimada	Error
0	1.09772503		1	1	8.90250533
1	2.76548318		2	2	27.6799074
2	7.41643054		3	9	-21.3521781
3	20.1227474		2.1	9.261	53.9774573
4	54.6156513		2.2	23.4256	57.1082657
5	148.465697		2.3	64.36343	56.6476087
6	403.457548		2.6	308.915776	23.4328921
7	1096.63398		2.7	1046.03532	4.61399706
8	2981.04734		2.8	3778.019983	-26.7346522
9	**8103.16322**		**2.75**	**8095.525993**	**0.09425**

10	**22026.5221**		**2.718**	**22003.63965**	**0.10388586**

Nota al profesor: Que el estudiante considere que estos datos representan una función exponencial, para cada par de datos el modelo exponencial se debe satisfacer por ejemplo, considerando y = posición = 20.12 y c = tiempo = 3, se debe cumplir, para la igualdad:

$$20.12 = b^3$$

Y hacer preguntas como: ¿En este caso cuanto debe valer b para que se cumpla la igualdad? Con el objetivo de que propongan valores de b hasta que se cumpla la igualdad.

Una vez que obtengan el valor de b, hacer preguntas como: ¿puedes calcular valores estimados de posición para otros valores de tiempo de la tabla?

Finalmente el estudiante puede comparar este valor estimado con el real (Calcular el error porcentual), utilizar otros valores de la tabla y repetir el proceso y determinar que b se acerca a e.

Situación 1.4: Un artista abre su cuenta de Facebook para mantenerse en contacto con sus fans y ese mismo día lo contactan 2 amigos. Después revisa su cuenta diariamente, observando que en el primer día tiene 6 amigos, en el segundo tiene 18, en el tercero 54, en el cuarto 162 y en el quinto día tiene 486 amigos que lo siguen por este medio:

a) ¿Será una función lineal? ¿Por qué?
b) ¿Será una función cuadrática? ¿Por qué?
c) De seguir con la tendencia descrita, cuando el artista checa su cuenta en el día 8, ¿cuántos fans tiene ahora en su cuenta? Explica cómo llegaste al resultado.
d) Encuentre la función $f(x)$ que modele el número de amigos que el artista tiene agregados al facebook en x días.
e) Usa este modelo para determinar los amigos que tiene el día 10 a las 5 de la tarde.
f) Grafique en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares estos valores. Describa su comportamiento.

Nota: Las situaciones 1.2 y 1.3 son modeladas por las llamadas funciones exponenciales donde la variable es un exponente. La forma general de éstas se escribe:

$$f(x) = a \cdot b^{x}$$

Donde b representa el factor de cambio o base de la función, x y a son cualesquiera números reales.

Ver: Función Exponencial

https://www.youtube.com/watch?v=YL-f8Jo-ASk

Ver: Propiedades de la función exponencial

https://www.youtube.com/watch?v=P7hrBKWyf_o

Respuesta 1.4:

a) No es una función lineal porque al hacer las comparaciones entre los valores se dará cuenta que el factor de cambio no es constante o también porque la razón d cambio no es constante.

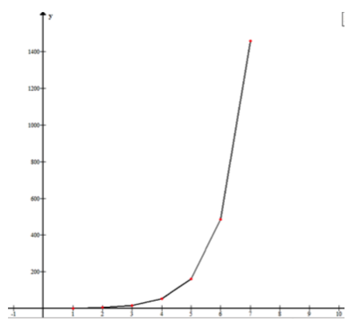
b) No es una función cuadrática, un argumento del porque podría ser que la segunda razón de cambio no es constante o que al hacer las comparaciones de los valores no crece en forma progresiva, si no que se disparan.

c) $f(8) = 4{,}374$

d) $f(t) = 2 \cdot 3^{\mathrm{t}}$

e) Encontrando que las 17 horas son equivalentes a ¾ de día, equivalente a 0.75, se tiene $f(t) = 2 \cdot 3^{10.75} = 269, 205.22$

f) Un bosquejo de la gráfica podría ser la dada considerando los puntos rojos y uniéndola argumentando que de seguir esta tendencia de los puntos, podría quedar como se muestra. Se debería notar que conforme crece la función, parecería que la curva se va a cercando al cero en x.



Nota al profesor: El estudiante puede generalizar de diferentes maneras la función aquí se muestran algunas respuestas a las que pueden llegar los estudiantes, dependiendo de su reflexión. Por lo que puede haber más, se debe estar atento a sus repuestas, respetando su forma de presentarla, siempre y cuando corresponda a dar una solución a la situación.

1. $f(t) = 2 \cdot 3^{\mathrm{t}}$

   Esta primera respuesta se encontró porque el estudiante consideró que el primer día era el valor inicial o cero, pero se concluyó que si se quisiera el cálculo para el día 15, por ejemplo, en la expresión tendría que considerarse el 14 y en este caso se tendría uno que tener presente esta condición.

2. $f(t) = 3^{\mathrm{t}} \cdot 2 - 3^{\mathrm{t}-1}$

   En esta respuesta el estudiante observó que al llegar a $\mathrm{f(t)} = 3^{\mathrm{t}} \cdot 2$, donde tuvo que multiplicar por 2 para que les diera el primer valor cuando $\mathrm{t} = 0$, pero releyendo el problema decía "…el primer día se le agregaron dos amigos…" por lo que ya pasó un día, entonces a la expresión le hacía falta algo pues no se comienza desde el día cero si no desde el día uno, de esta manera haciendo pruebas para ver que se le tenía que quitar a la función concluyeron que debería ser 3^{t-1} el valor anterior, el que se le debería restar a la función, quedándoles la expresión, y así funciona para todos los valores de t.

3. $f(t) = 2 \cdot 3^{t-1}$

En esta función el estudiante hace un razonamiento similar al de la expresión 1 pero nota que tiene que empezar desde el día 1, por lo que si agrega $t - 1$ en la expresión puede comenzar desde 1, sin afectarle en los días posteriores. Función que sería la más simplificada.

4. $f(t) = 3^{t} \cdot \frac{2}{3}$

En esta función el estudiante hace un razonamiento similar al de la expresión 1 pero nota que algo le falta a su expresión y en este caso deduce que es 2/3.

Se debe aprovechar esta situación para demostrar que todas estas expresiones son equivalentes y que además al generalizarla puede definir la función exponencial.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* El tema de esta situación son las redes sociales en las que se encuentran inmersos la mayoría de los jóvenes Universitarios, tema de su interés como lo es también el hecho de saber las personas que tiene agregadas a su red.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Se espera que el estudiante llegue a diferentes soluciones en esta situación, debe construir argumentos viables y defenderlos o debatirlos frente a otro grupo de estudiantes y sacar sus propias conclusiones, debe ser crítico de su trabajo y de los demás para hacer más enriquecedor su aprendizaje.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* Debe modelar la función gráfica y algebraicamente, para saber la tendencia de los amigos que se le van agregando al artista.

PM.7 A *Buscar y hacer uso de la estructura.* Analiza lo que sucede con la función en cada punto, busca el comportamiento en forma particular y haciendo uso de esta estructura la lleva a su caso generalizado.

PM.8 *Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido.* El comportamiento de la función en cada punto se repite constantemente, la regularidad de este razonamiento lleva consigo una función general de la situación.

Situación 1.5: Grafique las funciones con apoyo de un programa y explique.

a) Dadas las siguientes funciones, determine la regla que explique su comportamiento.
    a. $f(x) = 3^{\frac{1}{2}x}$
    b. $f(x) = 3^{x}$
    c. $f(x) = 3^{2x}$
    d. $f(x) = 3^{6x}$

   Si cambian todos los exponentes de las funciones a negativos. Explica lo que observas.

b) Determine la regla que explique el comportamiento de las siguientes funciones con respecto a las de a).

  a. $f(x) = 3^{\frac{1}{2}x+2}$
  b. $f(x) = 3^{x+2}$
  c. $f(x) = 3^{2x+2}$
  d. $f(x) = 3^{6x+2}$

Si en el exponente de en vez de sumarle 2 se le resta. ¿Qué puedes deducir al respecto? ¿Qué sucede con cualquier gráfica de a) cuando se le resta un número mayor que uno en comparación cuando se le resta un número menor que uno y en qué orden se encuentran estas tres gráficas?¿y cuando se le suma?

c) Determine la regla que explique el comportamiento de las siguientes funciones.

  a. $f(x) = 3^{x}$
  b. $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{x}$
  c. $f(x) = 2 \cdot 3^{x}$
  d. $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot 3^{x}$
  e. $f(x) = -2 \cdot 3^{x}$

d) Explique en forma general lo que sucede al comparar las gráficas de los siguientes tipos de funciones

  a. $f(x) = 3^{x}$
  b. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$
  c. $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

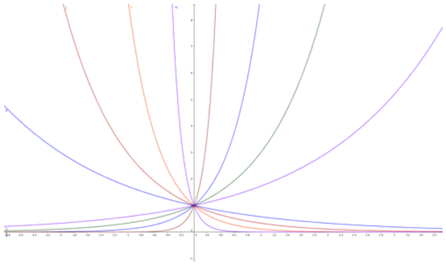
e) En cualquier función de la forma $f(x) = a \cdot b^{x}$¿qué representa a en su gráfica?

f) ¿Qué valores no puede tomar *b*? ¿por qué?

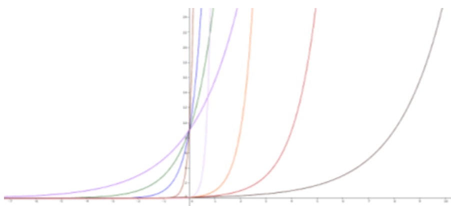
Respuesta 1.5:

a) Se puede notar que cuando el exponente x es multiplicado por un valor menor que uno, la gráfica se extiende sobre el eje de las x y cuando el valor es mayor que uno la gráfica de la función se comprime al eje y. Además las funciones crecen hacia el primer cuadrante positivo.

Cuando los exponentes son negativos las exponenciales crecen en el segundo cuadrante negativo del plano cartesiano, pero tienen el mismo comportamiento, cuando el exponente se multiplica por un número menor que uno la gráfica se extiende sobre el eje de las x y cuando éste número es mayor que uno se comprime sobre el eje de las y. Y las funciones crecen hacia el segundo cuadrante negativo.



b) Cuando se le agrega el 2 al exponente, las funciones en x=0 toman valores de 9, que es el punto donde se intersectan sus gráficas con el eje y, a partir de este punto crecen de manera positiva hacia el primer cuadrante. En cambio si se le disminuye en 2 al exponente de las funciones, sus gráficas intersectan al eje en 1/9 y crecen más lentamente que el caso en el que se le suma 2.



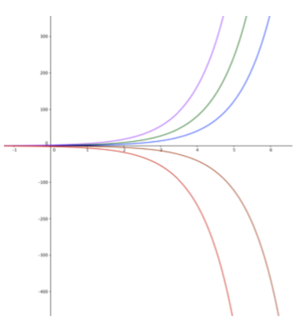
Si a cualquier función que se le resta un número mayor que uno, ésta se extiende más sobre el eje de las x, crece más lento que si se le resta un número menor que uno. Además estás dos gráficas aparecen abajo o después de la original.

Cuando se le suma un número mayor que uno, las gráficas de las funciones se comprimen más rápido sobre el eje de la y, que si se le suma un número menor que uno. Por lo que primero están las gráficas modificadas y después la original.

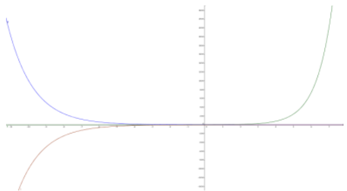
c) Cuando la función se multiplica por un número menor que uno; pero mayor que cero, la gráfica crece lentamente, por lo que se encuentra por debajo de la función original.

Cuando se multiplica por un número mayor que uno, la gráfica de la función crece más rápidamente que la función original, es decir se encuentra antes de dicha función y parece que se va comprimiendo al eje de las y.

Cuando la función se multiplica por un número negativo menor que uno, la gráfica es un reflejo de la que se multiplicó por un número positivo menor que uno, como funciones inversas. Lo mismo sucede con un número negativo mayor que uno.



d) Se puede observar que cuando la función toma valores mayores que uno en su base, la gráfica de la función tiende a crecer más en el primer cuadrante positivo y cuando la función toma valores menores que uno en su base, la función tiende a crecer más en el segundo cuadrante negativo. La tercera función es la inversa de la segunda.



e) Cuando x toma el valor 0, a representa la intersección con el eje y.

f) Necesariamente a debe ser mayor que cero, de lo contrario si x es par la función es positiva, pero cuando x impar la función es negativa y salta entre los valores del rango de la función. Cuando x es racional para algunos valores de x la función está definida, pero para otros no, por lo que contradice la definición de función.

Si fuera $b = 0$, se tendría una función constante en 0. Pues se tendría que cero elevado a cualquier número real, por definición siempre será cero. Si b fuera igual a 1, los valores de b^x siempre serían 1, mientras los valores del rango siempre tomarán el valor de a, teniendo una función constante.

Por lo tanto $b > 0, b \neq 1$

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* En esta situación se le presenta al estudiante la función que no es lineal ni cuadrática, por lo que se espera que tenga sentido para él saber el tipo de función al que se refieren las situaciones anteriores y sus parámetros que se tiene que considerar.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* El estudiante deberá razonar de manera abstracta al explicar las restricciones que tiene la definición de función exponencial.

PM.5 *Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica* Para explicar por qué a debe ser distinto de cero y de 1, el estudiante deberá recurrir a sus herramientas algebraicas de definiciones y leyes que le ayuden a llegar a una conclusión. Para hacer las gráficas deberá recurrir a un programa computacional, puede ser Desmos o Graph.

PM.6 *Asista a la precisión.* El estudiante debe tener cuidado cuando utiliza definiciones y símbolos para expresar sus razonamientos.

Situación 1.6: Se estima que la población de un municipio del Estado es de 1,400 habitantes y crece a una tasa del 3% anual, esto es, el porcentaje de lo que aumentará la población con respecto a la cantidad actual de habitantes:

a) Si al año se regresa a censar la población, escriba la operación que realizaría para determinar la cantidad de habitantes que tendrá el municipio.
b) Escriba las operaciones expresadas en un producto para determinar el total de habitantes en el segundo año.
c) Determine la función que le permita saber la población $P(t)$ del municipio en cualquier año t.
d) Utilizando la función que modela esta situación determine la población que tendrá el municipio si se regresa a censar a los 13 años, un mes y 24 días.

Respuesta 1.6:

a) $1400 + 1400 * 0.03 = 1400(1 + 0.03) = 1400(1.03)$

b) $1400(1.03) + 1400(1.03)(0.03) = 1400(1.03)(1.03) = 1400(1.03)^2$

c) $\mathrm{P(t)} = 1400(1.03)^{\mathrm{t}}$

d) $\mathrm{P(t)} = 1400(1.03)^{13.149} \approx 2{,}065$ habitantes

Nota al profesor: Recordarle al estudiante la forma en que obtiene los porcentajes, por ejemplo lo que hace para encontrar agregar un tanto por ciento al comprar un aparato por el que hay que pagar IVA, si el aparato cuesta $100 se haría la operación 100+100*0.16= 100(1+0.16)= 100(1.16) de manera que pueda modelar esta situación que tiene un incremento porcentual.

Guiar a los estudiantes en la factorización de las expresiones.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* La manera en que crece una población y que cada día somos más es un tema que preocupa, por lo que se espera que el estudiante comparta también este interés.

PM.5 *Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica*. Como ya ha visto problemas de este tipo anteriormente, debe usar herramientas adecuadas como el cálculo del porcentaje de una cantidad, realizar factorizaciones y generalizar como lo hizo en las otras situaciones.

PM.7 *Buscar y hacer uso de la estructura.* Buscará y hará uso de la estructura del cálculo del porcentaje y de la forma en que generalizó las situaciones anteriores.

PM.8 *Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido.* Buscar y expresar la regularidad en el razonamiento repetitivo de este tipo de situaciones.

Situación 1.7: Se hará la construcción de una carretera, para lo cual dos constructoras A y B ofrecen sus presupuestos y en función del costo el cliente decidirá la mejor opción. El presupuesto de la constructora A establece la cantidad de $100, 000.00 diarios por el tiempo que dure la obra, el presupuesto de la B por el contrario establece que inicialmente se le pague $1.00, y a partir del primer día $2.00, el segundo día $4.00, el tercero $8.00, el cuarto $16, el quinto $32.00, el sexto $64.00, el séptimo $128.00 y así sucesivamente hasta que se termine la obra.

a) ¿Cuánto se pagaría hasta el día 21 con la constructora A y B, respectivamente? ¿Qué sucede a partir del día 22?
b) Encuentre las funciones $A(t)$ y $B(t)$ que representan el costo de construcción de la carretera por la constructora A y B, respectivamente.
c) Si en ambos presupuestos se consideran las horas del día que se tiene a la maquinaria y a los trabajadores en la obra. ¿Cuánto se pagaría con la constructora A y con la B; respectivamente, si decidiera parar la obra el 21 del mes a las 12 horas del medio día?
d) ¿Qué decisión tomaría que le permita hacer la mejor elección?
e) Elabore una gráfica que ilustre las funciones modeladas para esta situación.

Respuesta 1.7:

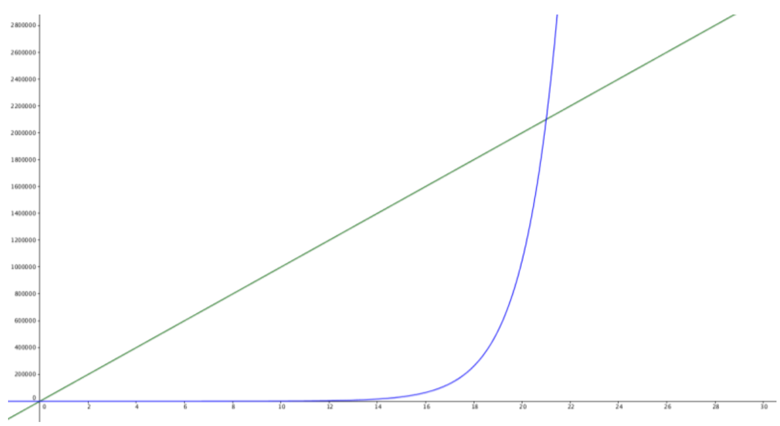
a) Para el día 21 con la constructora A se pagaría $\$2'100{,}000.00$ y con la B $\$2'097{,}152.00$. Para el día 22 la cantidad a pagar se dispara con la constructora B a $\$4'194{,}304.00$

b) $A(t) = 100{,}000(t)$ y $B(t) = 2^t$

c) $A(21.5) = 100{,}000(21.5) = 2'150{,}000.00$ y con $B(21.5) = 2^{21.5} = 2'965{,}820.80$

d) El estudiante podría sugerir quedarse con la constructora B y hacer la obra en 21 días para que le salga al menor costo, pero si la obra se lleva más de 21 días esta constructora no le conviene y debería considerar a la constructora A.

e) Note que como se sigue la tendencia de los días con sus respectivas horas, entonces la gráfica puede quedar como en el siguiente bosquejo.



Nota al profesor: Se debe estar atento a que en el programa que grafique; en este caso es en Geogebra, se considere la escala de 1:100000, para que el estudiante pueda visualizar que en el día 22 la función correspondiente a la constructora B se dispara.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Al presentarle al estudiante el caso en que debe de elegir la mejor opción para una empresa, es una manera de enfrentarlo al campo laboral, por lo que tiene sentido para él estar preparado para tomar la mejor decisión.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* Deberá modelar la función para la cantidad fija y la que está variando, generalizando para la segunda constructora.

PM.7 *Buscar y hacer uso de la estructura.* El estudiante tendrá que buscar y hacer uso de la estructura de las situaciones resueltas con anterioridad.

PM.8 *Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido.* Al analizar los datos para la primera semana, es estudiante deberá buscar y expresar la regularidad de este razonamiento.

Situación 1.8: Un biólogo tiene una población de estudio de 3, 000 bacterias y les proporciona a sus estudiantes la misma cantidad, para que le entreguen resultados de su crecimiento en tres meses, considerando que crecen a una razón del 2% mensual. Los estudiantes entregan al Biólogo sus resultados del cálculo de la población de bacterias, pero según el Biólogo sus resultados son incorrectos, pues él tiene datos diferentes a partir del segundo mes:

Meses (t)	0	1	2	3
Núm. de bacterias calculadas por los alumnos (G)	3,000	3,060	3,120	3,180
Núm. de bacterias calculadas por el biólogo (F)	3,000	3,060	3,121.20	3, 183.62

Tabla 3

a) Encuentre las funciones $F(t)$ que utilizó el biólogo y $G(t)$que usaron los alumnos para llegar a sus resultados, pasado un tiempo de "t" meses.
b) Determinar en ambos casos el factor de cambio.
c) ¿Cuáles son las consideraciones que hicieron los estudiantes y las que hizo el Biólogo, es decir en que se basaron para llegar a estos resultados? ¿Cuál proyecto es el correcto? ¿Por qué?

Respuesta 1.8:

a) $F(t) = 3000(1.02)^t$ y $G(t) = 3000(1 + (0.02)(t))$ ó $G(t) = 3000 + 3000(0.02)(t)$

Nota al profesor: Aunque el estudiante nota que $G(t)$ cambia a razón del 2%, 4%,6% y 8%, no sabe cómo expresarlo, se sugiere que describa el proceso para encontrar un porcentaje paso a paso. Otra expresión dada por los estudiantes es $G(t) = 3000 + (60)(t)$, que también es válida, pues el 2% de 3,000 es 60.

b) El factor de cambio de $F(t)$ es 1.02, y de $G(t)$ puede ser (0.02) ó 60, dependiendo de las consideraciones del estudiante.

c) El Biólogo consideró lo que había en cada mes y después le fue haciendo el incremento porcentual, por su parte los estudiantes hicieron el cálculo considerando lo que varía es el porcentaje cada mes. El proyecto correcto es el del biólogo porque sí consideró lo que había cada mes antes de hacerle su incremento porcentual, aunque el problema está abierto a discusión porque no se dice como es la razón a la que crecen, sólo que es del 2% mensual.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Aunque no todos los estudiantes universitarios tienen clases de biología, en sus estudios de nivel básico sí las tuvieron, tiene sentido para ellos el estudio de bacterias, de tal forma que perseveren en encontrar la respuesta de quien tiene la razón.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* En esta situación pueden haber discrepancias al deducir quien tiene la razón, por lo que los estudiantes deberán construir argumentos viables para soportar su razonamiento, autocriticarse y criticar los razonamientos de sus compañeros.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* Deberá hacer un modelo descrito como de interés simple y otro de interés compuesto.

PM.6 *Asista a la precisión.* Para encontrar las funciones de los estudiantes y del maestro, se debe tener especial cuidado cuando se están calculando los porcentajes para ambos casos.

PM.7 *Buscar y hacer uso de la estructura.* Buscar y hacer uso de la estructura del cálculo de porcentajes en su forma simple y cuando se están incrementando en cada mes.

PM.8 *Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido.* Para generalizar ambas funciones el estudiante deberá buscar y expresar la regularidad en el razonamiento repetitivo.

Situación 1.9: Un almacén de semillas registra la utilidad de $U(x)$ pesos obtenida por la cantidad x de costales de harina vendidos y los registra en una tabla como sigue:

x	99	100	101	102	103
$U(x)$	2997	3000	2997	2988	2973

a) ¿Qué tipo de función es?
b) ¿Cuántos costales nos dan una utilidad máxima? ¿Cuál es esa utilidad?
c) ¿Cuál es la función $U(x)$ que modela la utilidad de venta de cualquier cantidad de costales de harina x?

Respuesta 1.9:

a) Haciendo las segundas diferencias de $f(x)$ se puede observar que es una función cuadrática:

3000-2997=3
2997-3000=-3
2988-2997=-9
2973-2988-15

-3 – 3 = -6
-9 – (-3) = -6
-15 – (-9)=-6

b) Se observa en la tabla que la utilidad máxima nos la dan 100 costales y es de $3000.00

c) Con el punto máximo $h = 100, k = 3000$ y cualquier otro punto (99, 2997) se puede obtener la función cuadrática:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

$$2997 = a(99-100))^2 + (3000)$$

$$2997 = a(1)^2 + 3000$$

$$a = 2997 - 3000$$

$$a = -3$$

Así la función es: $f(x) = -3(x-100)^2 + 3000$

Nota al profesor: Esta situación está hecha para que el estudiante repase los conocimientos de las unidades anteriores y para que no se confíe que todos los problemas serán específicos de la unidad.

Situación 1.10: Suponga que deposita en el banco la cantidad de \$18,000.00 y le pagan el 2% de interés capitalizable mensualmente:

a) Determine lo que tendrá ahorrado al finalizar el primer mes, el segundo mes y el tercer mes. Exprese las operaciones que le llevaron al resultado, simplificadamente.
b) Exprese una función que represente en general el monto $M(t)$ que obtendrá con el capital C(que es lo que se deposita en el banco) a una tasa de interés i para cualquier tiempo t.
c) La función que modeló ¿Es lineal, cuadrática o exponencial? ¿Por qué?

Respuesta 1.10:

a)

$$F(1) = 18{,}000(1+0.02) = 18{,}360,$$
$$F(2) = 18000(1+0.02)^2 = 18{,}727.2$$
$$F(3) = 18000(1+0.02)^3 = 19{,}101.74$$

b)

$$M(t) = C(1+i)^t$$

Nota al profesor: Comentar a los estudiantes que obtuvieron una expresión que permite calcular la cantidad que se obtendrá de un capital en un determinado tiempo a una tasa de interés llamado interés compuesto, pues se capitaliza.

c) No es una función lineal porque las primeras diferencias no son constantes, ni es cuadrática pues las segundas diferencias no son constantes y si es una función exponencial pues la función de monto tiene una base elevada a un exponente t.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Es una función exponencial pero al argumentarlo el estudiante deberá razonar de manera abstracta y para determinar lo que ahorra cada mes deberá de hacerlo de forma cuantitativa, pues no se le proporciona la función.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* El razonamiento que lleva al estudiante a determinar que era una función exponencial lleva consigo que argumente su respuesta de manera que la pueda discutir con sus demás compañeros.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* El estudiante modela la función exponencial y se le presenta que la función varía con respecto a la tasa de interés que se le conoce como interés compuesto.

PM.7 *Buscar y hacer uso de la estructura.* En esta etapa de la secuencia didáctica el estudiante ya se encuentra familiarizado con este tipo de situaciones por lo que para resolverla sólo tiene que buscar y hacer uso de la estructura.

Situación 1.11: Una empresa que vende computadoras, puede vender 1000 computadoras si el precio es de 12,000 pesos cada una. Pero si el precio lo aumenta a 13,000 pesos se estima que se pueden vender 100 computadoras menos.

a) Identifica las variables dependiente e independiente que intervienen en la situación.
b) ¿La relación entre variables representa una función?
c) Si la demanda es lineal. Determina una función que modele el número de computadoras vendidas en función del precio.

Respuesta 1.11:

a) La variable dependiente es el número de computadoras vendidas, ya que dependen del precio que se fije, que es la variable independiente.

b) Cada precio que se establece hace que se tenga un número de ventas de computadoras y sólo uno, por lo tanto sí representa una función

c) $m = \frac{900-1000}{13{,}000-12{,}000} = -\frac{1}{10}$ y tomando el punto (12000, 1000) entonces:

$$1000 = -\frac{1}{10}(12000) + b$$

$$1000 = -1200 + b$$

$$b = 2200$$

La función que modela el número de computadoras vendidas en función del precio es:

$$f(x) = -\frac{1}{10}x + 2200$$

Nota al profesor: Esta situación está hecha para que el estudiante repase los conocimientos de las unidades anteriores y para que no se confíe que todos los problemas serán específicos de la unidad.

Situación 1.12: Compré un Iphone 5 el año pasado en 14,000 pesos. Después de un año su valor se ha depreciado en un 15%. Si continúa esta tendencia en lo subsecuente:

a) ¿Cuál sería su valor al final de primer año?
b) ¿Cuál sería su valor al final de segundo año?
c) Exprese las operaciones de forma simplificada que permita conocer el valor del celular después de 3 años.
d) Esta situación ¿se modela con una función lineal, cuadrática o exponencial? ¿Por qué?
e) Determine la función que modela esta situación para cualquier año y describa su comportamiento.

Respuesta 1.12:

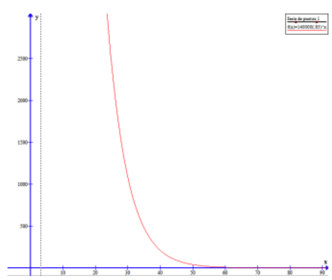
a) $\mathrm{f}(1) = 14{,}000(1 - 0.15)^1 = 11{,}900.$

b) $f(2) = 14{,}000(0.85)^2 = 10{,}115.$

c) $\mathrm{f}(3) = 14{,}000(0.85)^3 = 8{,}597.75$

d) No es una función lineal, ni cuadrática pero si es una función exponencial de base 0.85 y

e) $\mathrm{f}(\mathrm{t}) = 14{,}000(0.85)^{\mathrm{t}}$ se puede notar que es una función decreciente.



Nota al profesor: A algunos estudiantes aún se les dificulta escribir en términos de la cantidad anterior por lo que tienden a escribir:

$$\mathrm{f}(1) = 14{,}000 - \big((14{,}000)(0.15)\big) = 11{,}900$$

$$f(2) = 11{,}900 - ((11{,}900)(0.15)) = 10{,}115$$

$$f(3) = 10{,}115 - ((10{,}115)(0.15)) = 8{,}597.75$$

Se les puede sugerir que vayan escribiendo en forma simplificada las operaciones, a fin de llegar a la forma de una función exponencial

$$f(1) = 14{,}000 - ((14{,}000)(0.15)) = 14{,}000(1 - 0.15) = 14,000\ (0.85) = 11{,}900$$

En vez de poner los 11,900 en el paso siguiente, que escriba la cantidad simplificada, esto es:

$$f(2) = 14,000\ (0.85) - (\ 14,000\ (0.85))(0.15)) = 14,000\ (0.85)(1 - 0.15)$$
$$= 14,000\ (0.85)\ (0.85) = 14,000\ (0.85)^{\ 2} = 10{,}115$$

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* La forma en que decae el precio de un artículo es un tema que a todos interesa, independientemente del artículo que trate. El estudiante persevera para resolverlo pues es un planteamiento diferente a los propuestos.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para determinar que es una función exponencial y la forma de su gráfica el estudiante deberá construir argumentos viables, que le permitan defender su razonamiento de otros compañeros, siendo crítico también, del razonamiento de ellos.

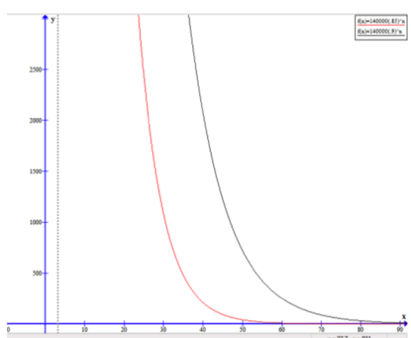
PM.4 *Modelar con las matemáticas.* Modela una función decreciente del precio del artículo.

PM.7 *Buscar y hacer uso de la estructura.* En la forma que tiene que generalizar la función debe buscar y hacer uso de la estructura de una función exponencial, además del cálculo de los porcentajes cuando éste no se agrega, se disminuye

Situación 1.13: Considerando la situación 1.11

a) ¿Cuál sería el costo del Iphone después de 3 años, si se devaluara un 10%?
b) Compare las gráficas de la devaluación del celular a una tasa de interés del 15% y del 10%, con base en ello explique cómo cambia su valor.

Respuesta 1.13: a) $f(3) = 14{,}000(0.9)^3 = 10{,}206$. b) Se nota que cuando es menos el interés la gráfica decrece más lentamente.



Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* La situación se vuelve retadora cuando baja el porcentaje de decremento, por lo que el estudiante se interesará en saber lo que sucede, aunque ya puede conjeturar sobre lo que pasará en este caso, lo que le permitirá seguir hasta el final para descubrirlo.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* Debe modelar de manera gráfica la manera en que la función decrece cuando el porcentaje disminuye.

PM.7 *Buscar y hacer uso de la estructura.* El estudiante hará uso de la estructura de la situación anterior.

PROBLEMAS PERSONALES

Situación 1.1P: Se plantan 3 flores de girasol y al cabo de dos meses se tienen 9 plantas, al término de tres meses se tienen 27 flores y cuando han pasado 4 meses ya se tienen 81 plantas.

a) ¿Será una función exponencial? ¿Por qué?
b) Determine el factor de cambio de esta situación, si lo hay.
c) ¿Cuál será la función que representa esta situación?
d) ¿Cuántas flores de girasol se tendrán pasados los 6 meses?

Situación 1.2P: Suponga que le hicieron un préstamo de $1,000 y le cobran el 4% mensual, ¿cuánto dinero tiene que pagar después de cuatro meses?

a) Elabore una tabla que ilustre los valores cada mes.
b) ¿Cuál es el factor de cambio que identifica cada mes?
c) Encuentre la función que describe esta situación.
d) ¿Cuál es el factor de cambio si el interés del 4% mensual es capitalizable quincenalmente?

Situación 1.3P: En la reserva ecológica de los Tuxtlas, los biólogos estudian las especies de animales en peligro de extinción y en particular determinan que la población de monos araña disminuye a una razón del 30% anual, por pérdida de su habitad y cacería furtiva. Si estiman que la población de monos araña, en las colindancias con la población de Soteapan, es de 300:

a) ¿Será una función exponencial? ¿Por qué?
b) Si es una función exponencial, ¿cuál es el factor de cambio?
c) Determine la función que describe esta situación.
d) Encuentre la gráfica de la función y explique su comportamiento.
e) ¿Cuándo se extinguirá la población de monos araña?

SESIÓN 2: FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Estándares del CCSSM que se promueven:

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

PM.4 Modelar con las matemáticas.

PM.5 Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.

PM.7 Buscar y hacer uso de la estructura.

PM. 8 *Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido*

Competencias específicas:

En esta sesión el estudiante:

1. Determina al logaritmo como un proceso inverso de una exponencial

2. Después de modelar (obtener la función) situaciones de la vida real que se comportan de manera exponencial, reconoce el uso del logaritmo para obtener el valor de la variable independiente dado el de la dependiente

Situación 2.1: La maestra de Biología encargó un experimento que consiste en observar el número de bacterias que se forman en una rebanada de melón después de cierto tiempo. Usando un microscopio, los estudiantes observaron la actividad de 1 bacteria, y conforme pasaba el tiempo notaron que para la primera hora había 2 bacterias, para la segunda 4 bacterias, para la tercera 8 bacterias, para la cuarta 16 bacterias y así sucesivamente para las demás horas,

a) Exprese una función que represente el número de bacterias $f(t)$ al final de un número de horas cualquiera "t" e identifique la variable dependiente y la independiente.
b) ¿Qué tipo de función representa esta situación? ¿por qué?
c) En la función $f(t)$ aproxime en qué tiempo hay 128 bacterias.
d) ¿Y 256 bacterias?
e) ¿En qué tiempo hay 180 bacterias? Haga aproximaciones con los valores de "t" de su función $f(t)$ de manera que se vaya acercando a 180.
f) El tiempo "t" encontrado, se puede expresar como $log_2 180 = t$, donde $log_2 180$ significa el logaritmo de base 2 del número 180. Dada la expresión $\log_2 180 = t$, explique su relación con la función $f(t)$.
g) En la función que modela el tiempo $log_2 180 = t$ para esta situación identifique la variable dependiente y la independiente. Escriba una función en general que modele el tiempo.

h) Grafica las funciones encontradas en a) y g). Explica las diferencias o similitudes que encuentras.

Definición: El logaritmo de base a de un número real positivo x es n, y se denota por $\log_a x = n$ si y sólo si n es el exponente al que debe elevarse la base a para obtener x.

Respuesta 2.1:

a) $f(t) = 2^t$, donde $f(t)$ es la variable dependiente y t es la variable independiente

b) Es una función exponencial porque tiene una base o factor de cambio igual a 2, elevado a un exponente t.

c) $t = 7$ horas

d) $t = 8$ horas

e) $t = 7.4918$

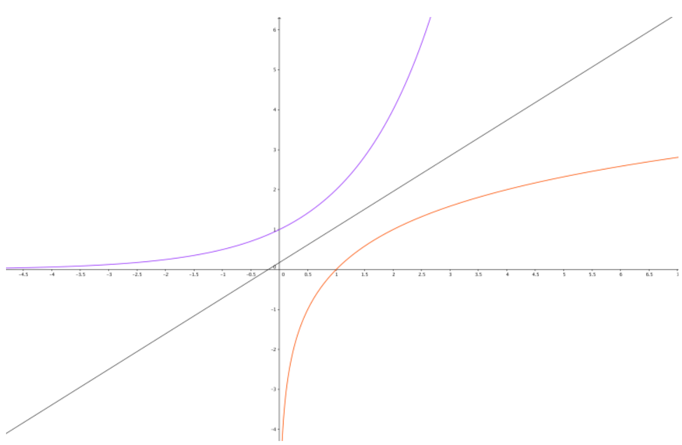
f) Analizando la función $f(t) = 2^t$, donde $f(t)$ es el número de bacterias y $\log_2 180 = t$ donde $f(t) = 180$. Es posible concluir que el número de horas "t" es el exponente al cual se debe elevar la base de la exponencial; 2, para que el número de bacterias sea de 180

g) La variable independiente es el número de bacterias y la dependiente es el tiempo.

$$t(b) = \log_2 b$$

donde b es el número de bacterias y $t(b)$ es el tiempo en el que se tiene un determinado número de bacterias.

h)



Notas al profesor:

1. En c), aunque lo recomendable es que en la función $P(t) = 2^t$ le den valores a t de tal manera que les de 128, para empezar a hacer aproximaciones. Notará que el estudiante empieza a querer utilizar los logaritmos, por lo que trata de resolver $log_2 180 = t$, pero al tratar de resolverlo con su calculadora científica (Casio Fx-82, al menos todo un grupo de 22 alumnos la poseen) notan que no es posible calcular el logaritmo de cualquier base, pues sólo trae para base 10 y en esta situación se requiere que sea de base 2, algunos investigan y logran encontrar la expresión que permite hallar el valor con logaritmos de cualquier base mediante la fórmula de cambio de base del logaritmo:

$$log_a x = \frac{log\, x}{log\, a}$$

$$log_2 128 = \frac{log\, 128}{log\, 2} = 7$$

Cabe hacer mención que las calculadoras Casio fx-991 sí cuentan con la opción de calcular logaritmos en cualquier base.

2. En e) Sugerir a los estudiantes dar valores para t de tal forma que se aproxime al valor de P(t), observando que para $\mathrm{t} = 7$ le falta para llegar a 180 y en $\mathrm{t} = 8$ se pasa. Por lo que se deben dar a la tarea de asignarle valores a $\mathrm{t} = 7.1, 7.2, 7.3, 7.4$ resultando

$$P(7.4) = 2^{7.4} = 168.897$$

$$P(7.49) = 2^{7.49} = 179.7689 \approx 180$$

$$P(7.4918) = 2^{7.4918} = 179.99 \approx 180$$

Es por ello que en la secuencia didáctica se agrega la sugerencia que para encontrar t se hagan aproximaciones de la función exponencial encontrada, con el propósito de relacionar el concepto de logaritmo con el de la exponencial. Del mismo modo es importante advertir a los estudiantes que la fórmula de cambio de base se logaritmo, la tienen que memorizar, hecho que no garantiza que al presentárseles una situación parecida puedan recordarla con facilidad. Guiar al estudiante a reflexionar sobre la aproximación de t, si es posible encontrar el número exacto de decimales que permitan encontrar exactamente el 180.

Videos sugeridos: Resolución de una función exponencial por logaritmos

https://www.youtube.com/watch?v=VI-zHNYLsZE

https://www.youtube.com/watch?v=m5jgvXy-Oso

https://www.youtube.com/watch?v=vIA8XAMOjZE

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM que se promueven

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Encontrar en que tiempo se tendrán 180 bacterias es algo complejo con lo que se enfrenta el estudiante pues tiene que resolver una función logarítmica, deberá razonar de manera abstracta y cuantitativamente sobre el concepto de función exponencial y hacer aproximaciones.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Al explicar el significado de la expresión a sus compañeros, el estudiante construirá argumentos viables que inviten a un debate en caso de haber discrepancias y deberá criticar el argumento que tengan otros acerca del significado de la expresión.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* El estudiante modelará una función logarítmica.

PM.5 *Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.* Para llegar al concepto de logaritmo, el estudiante deberá utilizar herramientas adecuadas como lo es la aproximación de una función exponencial o en su caso algún teorema de manera estratégica.

PM.7 *Buscar y hacer uso de la estructura.* El estudiante deberá buscar y hacer uso de la estructura en la situación anterior de manera que llegará a relacionar el concepto de exponencial con el de logaritmos.

PM. 8 *Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido.* Esta situación será resuelta en forma de aproximaciones de manera que se busque y exprese la regularidad en el razonamiento repetitivo de tal manera que se llegue al concepto de logaritmo.

Situación 2.2: Una empresa que distribuye productos de nutrición afilia (inscribe) a Don Roberto para que consuma sus productos, al cual le ofrece que afilie dos personas obteniendo con ello un porcentaje del 2% proporcional de lo que éstas consuman. Pero si cada persona convence a dos personas de afiliarse, a Don Roberto le subirán su porcentaje. Y así sucesivamente irán aumentando las personas afiliadas y con ello las ganancias de Don Roberto, siempre y cuando no se le salga una persona que forma parte de su pirámide de personas afiliadas.

a) Si Don Roberto es el nivel inicial y las dos personas que afilia forman parte del primer nivel de su esquema piramidal ¿Cuántas personas llevará afiliadas en sexto nivel?
b) Los datos que se presentan en el contexto de esta situación ¿determinan una función? ¿de qué tipo: lineal, cuadrática o exponencial? ¿por qué?
c) Exprese la función que represente el número de personas afiliadas $f(n)$ en cualquier nivel del esquema de pirámide "n".
d) ¿En qué nivel Don Roberto espera tener inscritas 512 personas?
e) Determine la función $g(n)$ para que Don Roberto sepa en qué nivel "n" se encuentra su pirámide, sabiendo que ha inscrito a un "x" número de personas.
f) Realice las gráficas de $f(n)$ y $g(n)$. Explique el comportamiento de ambas.

Respuesta 2.2:

a) Hasta el sexto nivel lleva afiliadas 64 personas

b) La función crece exponencialmente, pues el factor de cambio o la base es 2, es decir se duplica el número de personas en cada nivel. Por lo que no es una función lineal ni cuadrática.

c) $f(n) = 2^n$

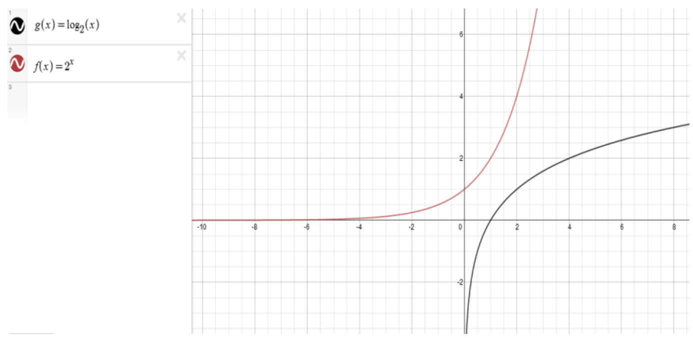
d) Se espera que el estudiante haga aproximaciones de n para obtener el resultado, pero también puede obtenerlo utilizando la fórmula de cambio de base del logaritmo

$$n = \log_2 512 = \frac{\log 512}{\log 2} = 9$$

En el noveno nivel Don Roberto espera tener inscritas 512 personas, por lo tendrá más ingresos de acuerdo al porcentaje que le proporciona la empresa.

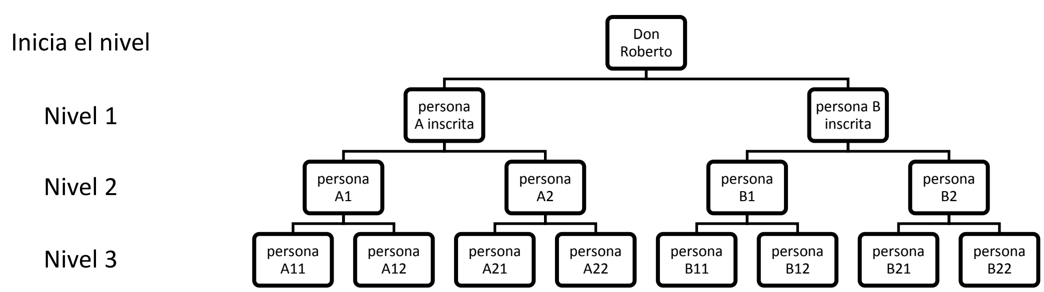
e) $g(n) = log_2 n$

f) Las gráficas de las funciones son inversas



Notas al profesor:

1. En la resolución de esta situación los estudiantes pueden enfocarse en el porcentaje que Don Roberto obtendrá por cada persona que inscriba. Sin embargo este dato sólo los distrae del objetivo, pues el análisis es que Don Roberto debe mantener a las personas en su nivel para que no se le caiga su esquema de pirámide y pueda obtener un porcentaje de ganancias. Deberá guiarlos a esquematizar la pirámide. Una opción podría ser la que se presenta:



Estándares para la práctica Matemática de la CCSS que se promueven

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Los negocios que prometen ganar mucho dinero haciendo poco es un tema que actualmente es muy sonado en cualquier nivel social. Muchos estudiantes tienen contacto con estos temas, por lo que se le da sentido a esta situación tocando este tipo de situaciones que promete obtener muchas ganancias y el saber la manera en que trabaja, si realmente se llegará a lo que prometen es algo que hace se persevere en resolver esta situación.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Para llevar esta situación a un planteamiento matemático el estudiante deberá razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* Se modelará una función que permita al estudiante responder a las interrogantes pero primeramente deberá darse cuenta que el porcentaje no tiene nada que ver, sólo es un distractor.

PM.5 *Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.* Utilizará un diagrama para determinar la forma en que trabaja una pirámide y encontrara la forma de su gráfica, esto es utilizar herramientas adecuadas de manera estratégica.

Situación 2.3: Suponga que deposita en el banco la cantidad de $18,000.00 y le pagan el 2% de interés capitalizable mensualmente:

a) ¿En cuánto tiempo tendrá $20,000?
b) ¿Cuál será la función $f(b)$ para encontrar el tiempo que tiene que transcurrir para que obtenga una cantidad deseada (b) puesta en el banco en una cuenta que genera el porcentaje (i) de interés?

Respuesta 2.3:

a) Encuentre el modelo de la función exponencial

$$f(x) = 18000(1.02)^x$$

Sustituya la cantidad que quieren obtener, esto es:

$$20000 = 18000(1.02)^x$$

$$\frac{20000}{18000} = 1.02^x$$

$$\mathrm{x} = \log_{1.02} 1.111$$

$$x = \log_{1.02} 1.111 = \frac{\log 1.111}{\log 1.02} = 5.7\ meses$$

b) La función puede quedar representada de dos formas:

$$f(b) = \log_{1.02} \frac{b}{1800}$$

$$f(b) = \log_{i+1} \frac{b}{Capital\ inicial}$$

Estándares para la práctica Matemática de la CCSS que se promueven

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* El estudiante razonará de manera abstracta el concepto de función exponencial y encontrará que para encontrar el tiempo deberá llegar a una expresión logarítmica.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* Se hará un modelo que involucre incrementos de porcentaje de una cantidad y una función que le permita encontrar el tiempo, para lo cual deberá llegar a una forma general.

PM.5 *Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.* Utilizará herramientas adecuadas como el concepto de función exponencial para incrementos sobre incrementos de un capital y la forma en que se representa una función logarítmica cuando ya se conoce su función inversa que es la exponencial.