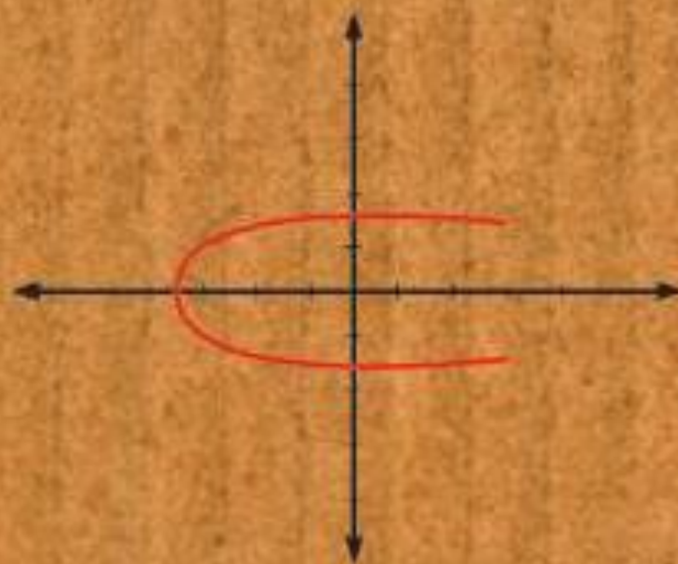
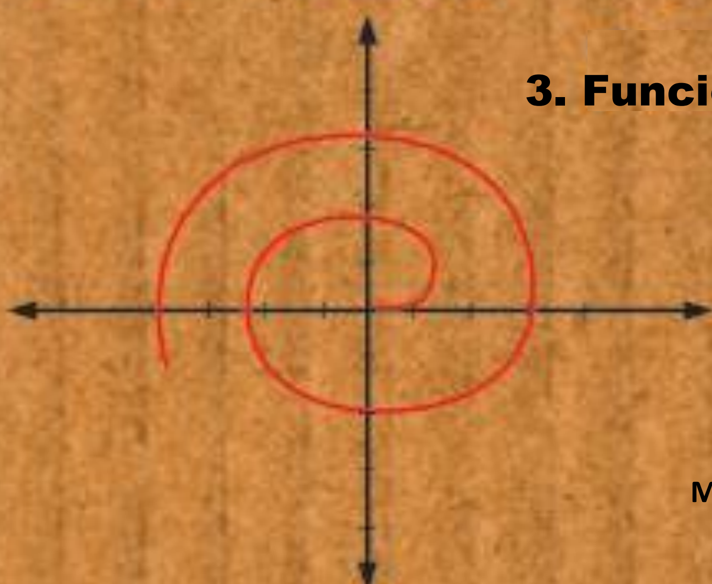


Cálculo



3. Funciones cuadráticas

Mtra. Zenaida Avila Aguilar

Universidad
Veracruzana

RECOMENDACIONES GENERALES PARA EL PROFESOR

Pondrá énfasis en el trabajo que los alumnos desarrollarán en el aula. Esto supone aclarar a los estudiantes que deberán realizar, como trabajo extra escolar de cada a sesión, las actividades que se describen a continuación:

Resolver un problema que no haya sido resuelto en el aula a lo largo de las sesiones. El problema puede ser elegido de la lista de problemas a ser resueltos como trabajo individual que aparece al final de la sesión.

Construir y resolver un problema que requiera la aplicación de los conceptos dados en la sesión y que esté relacionado con su área de estudio de interés.

Describir el proceso que han seguido para verificar el resultado del problema que haya resuelto. Consideramos necesario que el profesor o el monitor programe, en cada sesión, las siguientes actividades:

Intervención del profesor, exposición de los estudiantes, trabajo en equipo, trabajo individual y discusión.

A continuación, describimos brevemente cada una de las actividades que mencionamos en el párrafo anterior. Cabe mencionar que el orden en que las presentamos, no guarda relación con su importancia.

La descripción de las mencionadas actividades no supone que deban realizarse exhaustivamente en una clase de 50 minutos.

Intervención del profesor

Las intervenciones del profesor, al introducir un tema, han de ser cortas. En todo caso, han de producirse con la finalidad de orientar a los estudiantes en aspectos concretos como:

a) Establecer los objetivos particulares.

b) Describir la forma de organizar el trabajo de los equipos y en el aula.

c) Explicar procedimientos, hechos o heurísticas que permitan a los estudiantes avanzar en la resolución de un problema.

Exposiciones de los estudiantes

Las intervenciones de los estudiantes pueden ser de manera individual o por equipos para:

a) Presentar sus argumentos.

b) Dirimir ideas que puedan parecer contrarias entre uno o más miembros del equipo.

c) Presentar el proceso de resolución de un problema.

d) Presentar el proceso de resolución de algún problema dado como trabajo extra escolar;

e) Presentar trabajos o tareas a desarrollar fuera del aula.

Trabajo en equipo

Los equipos podrán integrarse con dos o tres estudiantes. El trabajo en equipo tiene como propósito proporcionar a los estudiantes un contexto más o menos estable y continuo para enfrentar colectivamente la resolución de problemas. Se sugiere dedicar a esta actividad el tiempo suficiente en cada sesión para resolver los problemas planteados.

Trabajo individual

El trabajo individual tiene como propósito evaluar el trabajo de cada estudiante fuera de la sesión. La frecuencia y grado de participación puede obtenerse a partir de la participación individual en el aula o, bien, a partir de los reportes escritos que formen parte del portafolio de trabajo de cada estudiante.

Discusión general

Esta actividad ha de permitir a los estudiantes escuchar y valorar las preguntas y comentarios de sus compañeros; corregir errores cometidos en el proceso de resolución de un problema o aprender a sustentar sus ideas.

El trabajo cotidiano consiste, fundamentalmente, en la resolución de problemas de diferentes grados de dificultad. Así, la colección de problemas que proponemos puede facilitar el propósito del profesor

ESTÁNDARES PARA LA PRÁCTICA MATEMÁTICA DEL COMMON CORE STATE STANDARDS FOR MATHEMATICS (CCSSM)

Para saber cuáles son los aprendizajes que se promueven en cada situación didáctica, nos basaremos en los ocho Estándares para la Práctica Matemática de las Funciones establecidas en el Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM) para el nivel universitario. Estos estándares pueden ser considerados como elementos fundamentales de la resolución de problemas matemáticos:

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

PM.4 Modelar con las matemáticas.

PM.5 Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.

PM.6 Asista a la precisión.

PM.7 Buscar y hacer uso de la estructura.

PM.8 Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido. (CCSSI 2010)

ÍNDICE

UNIDAD 3: FUNCIONES CUADRÁTICAS

UNIDAD 3: FUNCIONES CUADRÁTICAS

SESIÓN 1: RAZÓN DE CAMBIO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Estándares del CCSSM que se promueven:

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

PM.4 Modelar con las matemáticas.

PM.5 Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.

PM.6 Asista a la precisión.

PM.8 Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido.

Competencias específicas:

En esta sesión el estudiante:

1. Distingue una función cuadrática de otra que no lo es

2. Reconoce una función cuadrática representada en una tabla o en una gráfica y en cualquier contexto

3. Obtiene la razón de cambio de la razón de cambio de una función cuadrática

4. Determina la función cuadrática (forma general) que modela ciertos fenómenos usando 3 puntos

Situación 1.1: Si obtenemos el cambio promedio de a a b cuando $b - a = constante$, tenemos que $m = \frac{\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)}{b-a} = \frac{\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)}{constante}$ a este valor lo llamaremos: Primera diferencia de $f(x)$.

En las siguientes tablas de relaciones analizar cómo son las primeras diferencias de $f(x)$:

a)

x	$f(x)$
-2	3
-1	6
0	9
1	12
2	15
3	18

b)

x	$f(x)$
0	1
4	2
8	5
12	10
16	17

c)

x	$f(x)$
0	0
1	3
2	12
3	27
4	48

¿Cuáles describen funciones lineales? Argumentar la respuesta.

Respuesta 1.1: Se espera que los estudiantes obtengan las primeras diferencias (razones de cambio) siguientes: en el inciso a) siempre 3, por lo tanto representa a una función lineal; en el inciso de b) son $\left\{\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4}\right\}$ y en el c) son {3, 9, 15, 21}, por no ser las mismas diferencias no representan funciones lineales.

Nota al profesor: Se recuerda que el trabajo debe ser por equipos y NO dar la respuesta. Sólo se debe apoyar a los estudiantes si hacen preguntas porque de esa manera se observa un avance, de otro modo el profesor simplifica el problema.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* El estudiante deberá observar y analizar de manera abstracta cada una de las tablas. Debe aplicar los conocimientos que sabe de funciones lineales, para distinguir cuál de las 3 tablas representa una función lineal.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder expresar que la primera tabla representa una función lineal y las otras dos no, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir de lo que saben que caracteriza a las funciones lineales, que el cambio promedio es el mismo en cualquier par de puntos. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.6 *Asista a la precisión.* El estudiante debe ser preciso en las operaciones realizadas al obtener las diferencias, ya que puede haber errores con los números negativos y eso dificultaría ver en cuales tablas el cambio promedio es constante.

Situación 1.2: En las tablas anteriores, que NO representan una función lineal, generar dos nuevas columnas. En una columna escribir las primeras diferencias obtenidas y en la otra obtener las diferencias de estas diferencias (segundas diferencias), como sigue:

x	$f(x)$	Primera diferencia	Segunda diferencia
x_1	$f(x_1)$		
		$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = Diferencia\ 1$	
x_2	$f(x_2)$		$Diferencia\ 2 - Diferencia\ 1$
		$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_2-x_1} = Diferencia\ 2$	
x_3	$f(x_3)$		
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

¿Qué observas en las segundas diferencias de $f(x)$ obtenidas en cada una de las tablas?

a) ¿Qué tienen en común los resultados que obtuviste en las tablas consideradas?
b) ¿Las diferencias de diferencias de f(x) puede ser cero? ¿Por qué?
c) Las funciones que modelan las tablas consideradas en los incisos anteriores se llaman Cuadráticas, ¿qué puedes conjeturar sobre estas funciones de acuerdo a tus respuestas anteriores?

Respuesta 1.2:

a) Las segundas diferencias de $f(x)$ en las tablas b y c del ejercicio anterior (que no representan funciones lineales) son siempre $\frac{1}{2}$ y 6 respectivamente.

b) En ambos casos, las segundas diferencias de $f(x)$ son constantes.

c) No, porque esto solo sucede en las funciones lineales.

d) Las segundas diferencias de $f(x)$ siempre son constantes y diferentes de cero.

Nota al profesor: Si es estudiante tiene problemas para obtener las diferencias de las diferencias puede auxiliarse con el siguiente video:

https://www.youtube.com/watch?v=yC-weNHQFBs

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* El estudiante deberá observar y analizar las segundas diferencias para darse cuenta que son constantes y es una de las características que le ayudará a abstraer y generalizar cuándo una tabla representa a una función cuadrática.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder expresar que la segunda y tercera tablas representan una funciones cuadráticas, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir de la obtención de la segunda diferencia, que es constante. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.6 *Asista a la precisión.* El estudiante debe ser preciso en las operaciones realizadas al obtener las diferencias de las diferencias, ya que pueden tener errores con los números negativos y eso dificultaría ver en cuales tablas representan una función cuadrática.

PM.8 *Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido.* Al observar que en las 2 tablas las segundas diferencias de $f(x)$ son constantes y representan funciones cuadráticas, el estudiante podrá darse cuenta que todas mantienen la misma estructura.

Situación 1.3: ¿Cuáles de las siguientes situaciones son modeladas por una función cuadrática?

a) Una esfera sólida de cobre se sometió a un incremento homogéneo de temperatura y se dilató hasta llegar a un crecimiento máximo de su diámetro. Posteriormente se puso a enfriar y se registró como fue regresando el diámetro a su tamaño:

Tiempo (minutos)	**Tamaño del Diámetro**
0	11 mm
1	10.5 mm
2	10.25 mm
3	10.125 mm
4	10.063 mm
5	10.031 mm
6	10.016 mm

b) Carlos deja caer una piedra de la azotea de un edificio, que tiene una altura de 20 metros. Comienza a tomar el tiempo en que tarda en llegar al suelo y la distancia que va recorriendo como sigue:

Tiempo (segundos)	**Distancia recorrida**
0	0 m
1	0.8 m
2	3.2 m
3	7.2 m
4	12.8 m
5	20 m

c) El gerente de una empresa azucarera analiza los registros de venta de sus productos y anota en una tabla las utilidades obtenidas por tonelada de azúcar como sigue:

Azúcar (toneladas)	Utilidades (miles de pesos)
1	13
3	32
5	47
7	58
9	65
11	68
13	67
15	62
17	53

d) Los cables que sostienen un puente colgante tienen diferentes alturas y están sostenidos por dos torres de 50 metros de alto. Los cables tocan la superficie de rodamiento a la mitad de la distancia de las torres. El registro de la altura de las cuerdas de una torre a otra es el siguiente:

Largo (metros)	Altura (metros)
0	50
5	38.281
10	28.125
15	19.531
20	12.5
25	7.031
30	3.125
35	0.781
40	0
45	0.781
50	3.125
55	7.031
60	12.5
65	19.531
70	28.125
75	38.281
80	50

Respuesta 1.3: La situación a) no puede ser modelada por una función cuadrática, sus segundas diferencias son: {0.25, 0.125, 0.063, 0.03, 0.017}; las de b) son siempre 1.6; las de c) son siempre -2; las de d) son siempre 1.56; así b), c) y d) sí pueden ser modeladas por funciones cuadráticas.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* La manera de darle sentido a esta situación, es hacerla de interés para el estudiante, con tablas que modelan fenómenos de la vida real: someter al calor el cobre, dejar caer una piedra y las utilidades de la venta del azúcar.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* El estudiante deberá observar y analizar de manera abstracta las diferencias de las diferencias de las tablas para saber cuáles pueden ser modeladas por funciones cuadráticas.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder expresar que las últimas 2 tablas representan funciones cuadráticas, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir de la obtención de la diferencia de la diferencia de $f(x)$, que es constante. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

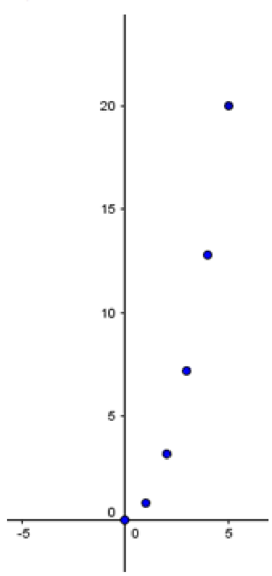
PM.6 *Asista a la precisión.* El estudiante debe ser preciso en las operaciones realizadas al obtener las segundas diferencias de $f(x)$, ya que pueden tener errores con los números negativos eso dificultaría ver en cuales tablas representan una función cuadrática.

Situación 1.4: Grafica las tablas de la situación anterior que pueden ser modeladas por una función cuadrática.

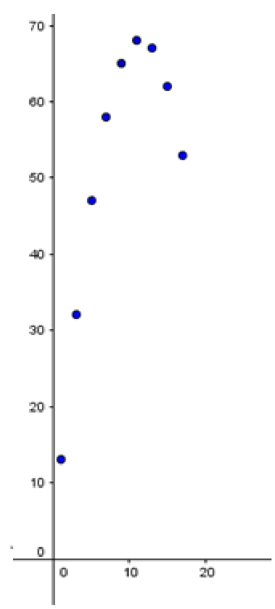
a) ¿Cómo conjeturas que son las gráficas que caracterizan a las funciones cuadráticas?
b) En cada par de puntos consecutivos de la gráfica correspondiente a la tabla d) traza las rectas que representan las pendientes (razones de cambio promedio o primeras diferencias) y analiza cómo cambian de inclinación con respecto al valor.

Respuesta 1.4: Las gráficas de b), c) y d) son parábolas con un máximo o un mínimo siempre, aunque por el contexto pareciera que b) no lo tiene

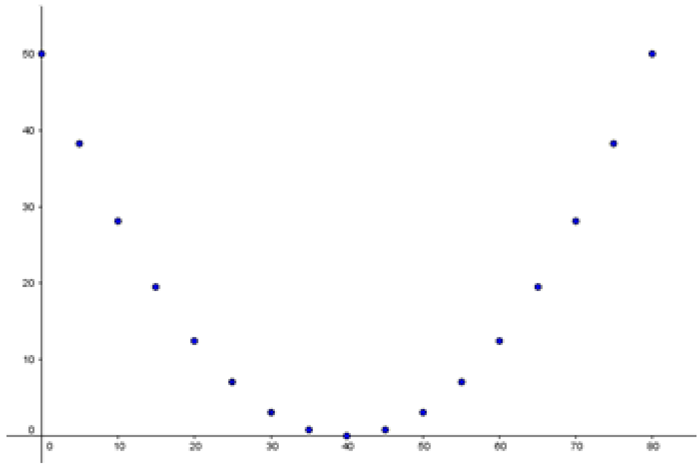
b)



c)



d)



Nota al profesor: Después de graficar a mano, el profesor puede mostrar al estudiante un programa para realizar las gráficas rápidamente usando la tecnología (un ejemplo, www.desmos.com).

b) En la unidad anterior analizaron que si las rectas decrecen la pendiente es negativa y si crece es positiva. Una vez que saben que es positiva (creciente) deben analizar que hay diferentes inclinaciones y sus correspondinetes valores. En la situación anterior ya habían calculado las primeras diferencias (razones de cambio), unicamente comparan los valores con las inclinaciones de la gráfica. Este inciso fue agregado como apoyo para poder resolver la situación 1.5.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Después de analizar las tablas que modelan fenómenos de la vida real que pueden ser modelados con funciones cuadráticas, los estudiantes tendrán que ver cómo se comportan sus gráficas.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* El estudiante deberá observar y analizar las gráficas obtenidas de las tablas que pueden ser modeladas por funciones cuadráticas para abstraer que estas tablas siempre son parábolas con un punto máximo o mínimo.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder expresar cuál es la característica de las gráficas que representan funciones cuadráticas, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir de una generalización de lo obtenido con las tablas. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* El estudiante modelará los fenómenos registrados en las tablas a partir de las gráficas obtenidas.

Situación 1.5: Se sabe que las primeras diferencias (razones de cambio) de una función cuadrática en los siguientes puntos son:

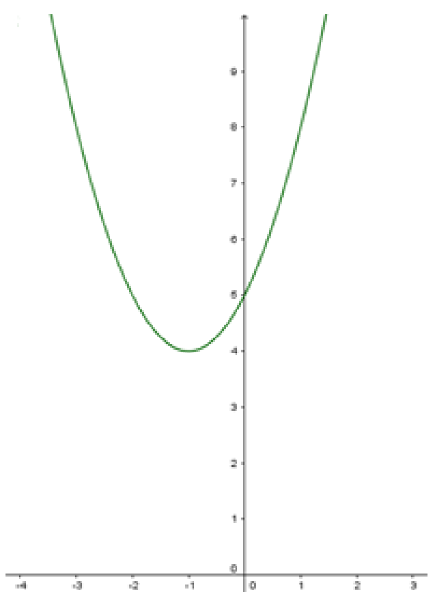
x	Primera diferencia de $f(x)$
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	

a) ¿Qué significa que la razón de cambio sea positiva o negativa en un par de puntos?

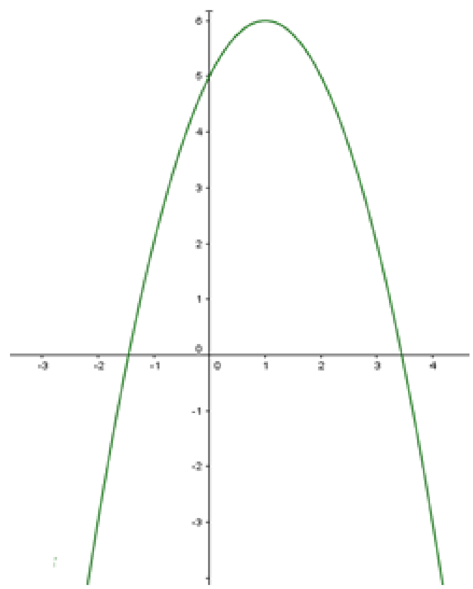
b) ¿Qué sucede en una función cuadrática cuando sus razones de cambio pasan de ser negativas a positivas o viceversa?

c) Analizando las razones de cambio de la tabla, determina cuál sería la gráfica de su función $f(x)$

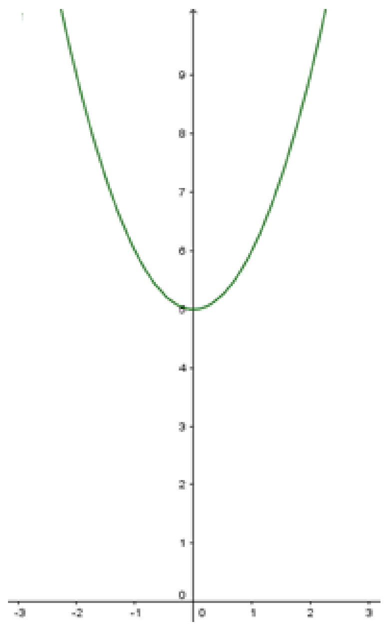
a)



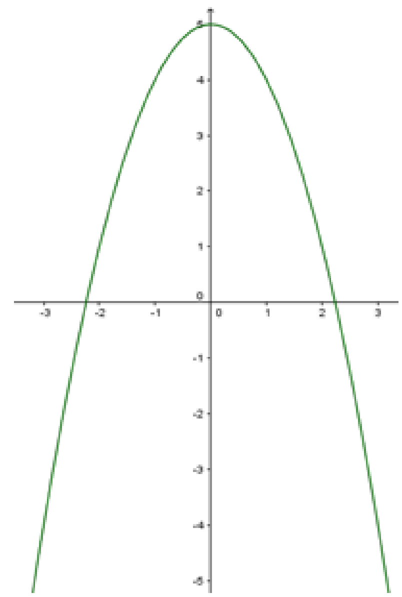
b)



c)



d)



Respuesta 1.5:

a) La razón de cambio es la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos, así que el valor de la pendiente es la inclinación que tenga, con esta inclinación vemos si es creciente o decreciente.

b) Hay un cambio de decreciente a creciente y viceversa, así que existe un mínimo o un máximo en la función cuadrática

c) Las razones de cambio son negativas entonces la función decrece y luego positivas así que la función crece. El cambio se da entre -1 y 1, por lo tanto ahí se tiene un mínimo. La gráfica de la función debe ser el inciso c)

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

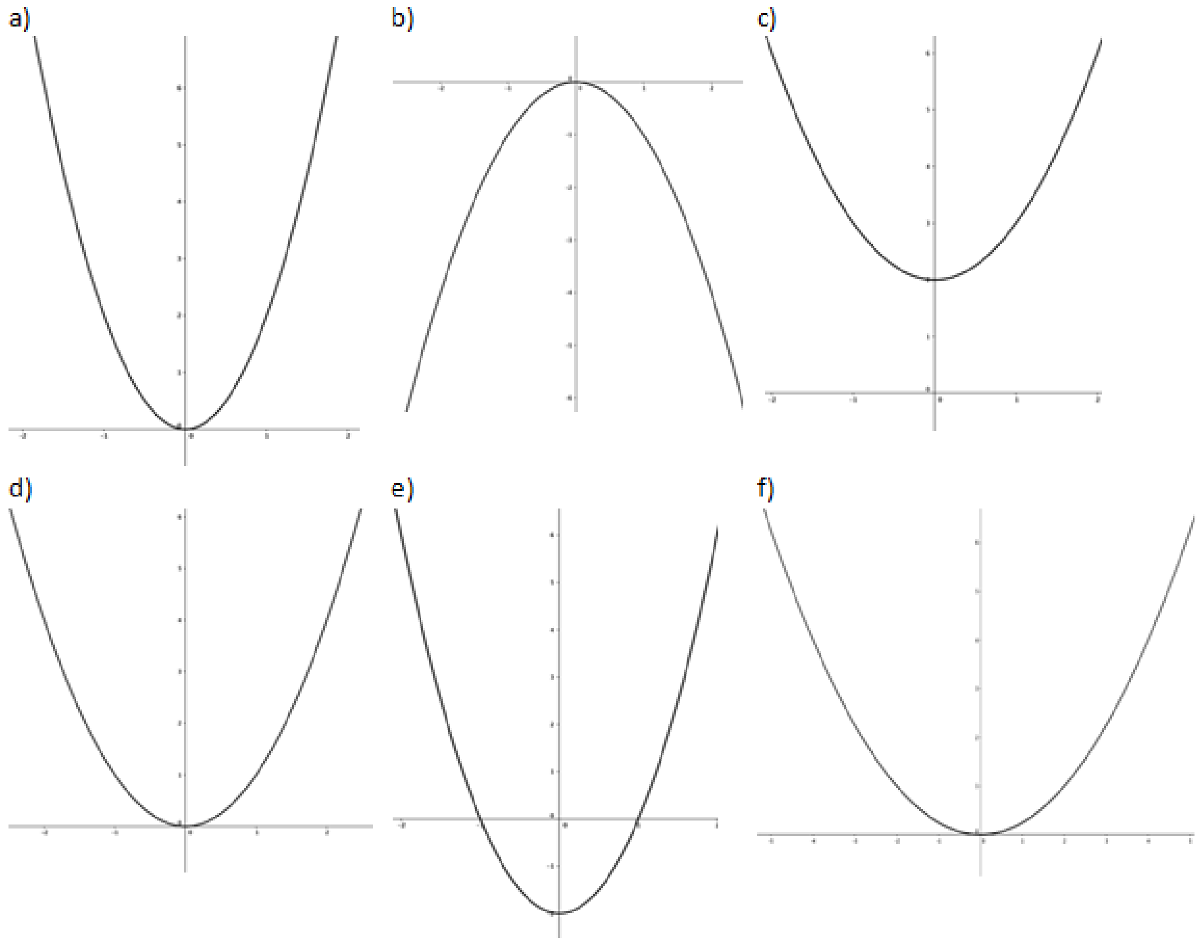
PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* El estudiante deberá recordar qué significa el valor de la razón de cambio, si la función crece o decrece para analizarlo en la tabla y comprarlo con las gráficas dadas

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder determinar cuál es la gráfica que corresponde a la tabla, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir de un análisis en las razones de cambio de cada par de puntos. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.8 *Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido.* El estudiante conjeturará que un cambio de signo en las primeras diferencias de una cuadrática significa que se tiene un máximo o mínimo.

Situación 1.6: Dado el valor de las pendientes obtenidas de una función (primeras diferencias). Determine las gráficas asociadas con estas pendientes.

Valores de las pendientes	Gráfica o gráficas asociadas
$3, 1, -1, -3$	
$-3, -1, 1, 3$	
$-6, -2,2,6$	
$-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$	



Explique lo que sucede en los casos que al conjunto de valores de las pendientes se le asocian varias gráficas

Respuesta 1.6:

Valores de las pendientes	Gráfica o gráficas asociadas
$3, 1, -1, -3$	b)
$-3, -1, 1, 3$	c) y d)
$-6, -2,2,6$	a) y e)
$-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$	f)

El estudiante debe notar que en los casos en los que hay 2 gráficas asociadas a las mismas pendientes, únicamente cambian en la intersección con el eje y

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* El estudiante deberá analizar las pendientes para determinar si la función crece o decrece y comprarlo con las gráficas dadas

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder determinar cuáles gráficas le corresponden a las pendientes, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir de un análisis en los valores de las pendientes dadas. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

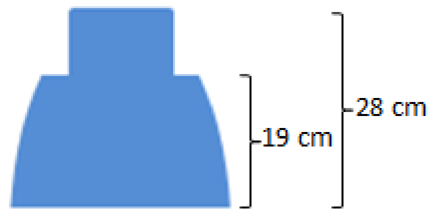
PM.8 *Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido.* El estudiante conjeturará que en los casos en los que hay varias gráficas asociadas a las mismas pendientes, únicamente cambian en la intersección con el eje y

Situación 1.7: El registro del llenado de un contenedor de agua es medido de acuerdo a la altura que ocupa el agua en el contenedor cada minuto, como se observa en la siguiente tabla:

Tiempo (minutos)	**Altura (cm)**
1	4
2	7
3	12
4	19
5	28

a) ¿El llenado del contenedor puede ser modelado por una función cuadrática? Grafica la tabla.

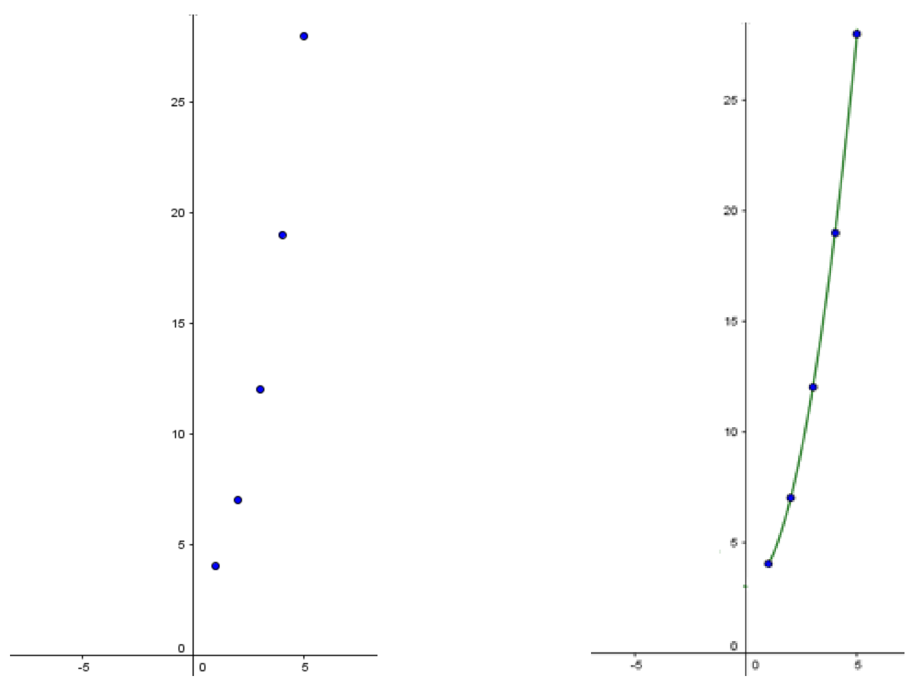
b) Si al contexto le agregamos que la forma del contenedor es la imagen siguiente, ¿puede ser modelada por una función cuadrática? Dibuja la nueva gráfica. ¿Qué puedes concluir?



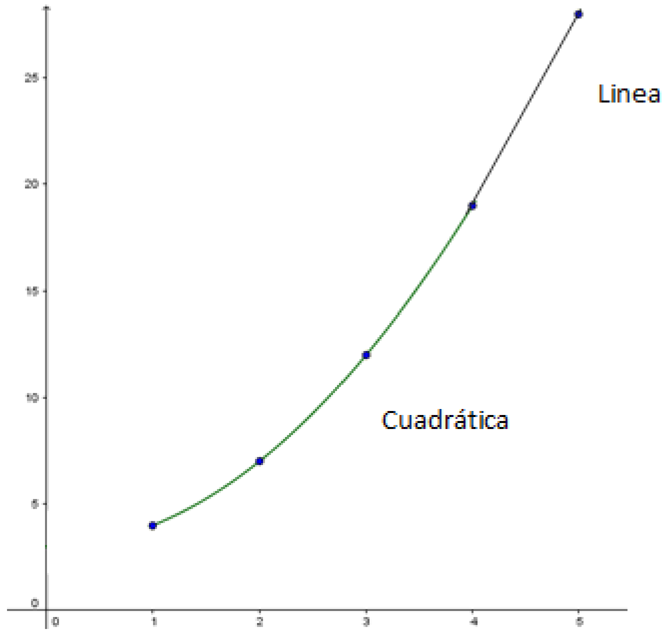
Contenedor

Respuesta 1.7:

a) Las segundas diferencias son siempre 2, los puntos pueden ser modelados por una cuadrática. Algunos estudiantes pueden graficar los puntos u otros hacer la línea continua para unir los puntos, esta diferencia se analizará en el siguiente inciso.



b) En la imagen se observa que hasta los 4 minutos se llenó de forma cuadrática, pero de los 4 a los 5 minutos se llenó de forma lineal. Aunque exactamente a los 5 minutos coincide con la altura llenada de forma cuadrática, el tiempo de llenado entre 4 y 5 minutos fue lineal (el volumen fue el mismo en un contenedor de la misma altura pero con forma diferente). Se concluye que aunque el análisis algebraico nos arroje un resultado, el contexto es el que define lo que es válido en una modelación. La gráfica quedaría como la unión de una cuadrática en el dominio [1,4] y una lineal en [4,5], para poder observarlo se hace un cambio de escala en el eje de las x:



Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Después de analizar la tabla que modela el llenado de un contenedor, los estudiantes tendrán que analizar si se trata de una función cuadrática.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder realizar la nueva gráfica, el estudiante deberá construir argumentos viables del por qué no es una función cuadrática en todo el dominio a partir de la imagen del contenedor. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* El estudiante modelará con una gráfica el llenado del contenedor usando los datos de la tabla y la imagen aportada

PM.6 *Asista a la precisión.* El estudiante cree obtener la gráfica que modela el llenado del contenedor, pero asiste a la precisión al tener el contexto de la forma del contenedor.

Situación 1.8: Si la forma general de una función cuadrática es $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ determina la función que modela el llenado del contenedor de la situación anterior para x en [1,4].

Respuesta 1.8: El estudiante debe recordar que al tener las incógnitas A, B, C requiere 3 puntos cualesquiera de los 4 que se le dan para resolver un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$4 = A(1)^2 + B(1) + C$$

$$7 = A(2)^2 + B(2) + C$$

$$12 = A(3)^2 + B(3) + C$$

$$A + B + C = 4$$

$$4A + 2B + C = 7$$

$$9A + 3B + C = 12$$

Resolviendo por cualquier método se tiene: $A = 1, B = 0\ y\ C = 3$, entonces $f(x) = x^2 + 3$ para x en [1,4]

Extra: Para x en [4,5] se construye la función lineal con 2 puntos (4,19) y (5,28) $f(x) = m(x - x_1) + y_1$

La pendiente es $m = \frac{28-19}{5-4} = 9$

La función es $f(x) = 9(x - 4) + 19$, es decir $f(x) = 9x - 17$ para x en [4,5]

Nota al profesor: El profesor puede comentar al estudiante que $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ es la forma general de una función cuadrática. Si el estudiante tiene problemas para determinar la ecuación puede auxiliarse del siguiente video:

https://www.youtube.com/watch?v=6lJL-QhqGQc

Algunas ligas en donde se puede encontrar una calculadora online para resolver sistemas 3x3 son:

http://es.onlinemschool.com/math/assistance/equation/gaus/

http://www.vadenumeros.es/actividades/sistemas-regla-de-cramer.htm

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Después de analizar la tabla que modela el llenado de un contenedor, los estudiantes tendrán que determinar cuál es la función $f(x)$ que modela la tabla.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Al determinar que deben evaluar los puntos en la forma general de la cuadrática, parten de un razonamiento abstracto a uno cuantitativo.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder determinar la función cuadrática que modela el llenado del contenedor, el estudiante deberá construir argumentos viables que lo llevaron a obtenerla. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* El estudiante modelará con una función el llenado del contenedor usando los datos de la tabla y la imagen aportada.

PM.5 *Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.* Al tener 3 incógnitas necesita por lo menos 3 puntos para determinar la función cuadrática que los modela, el estudiante debe resolver el sistema por algún método como una herramienta estratégica.

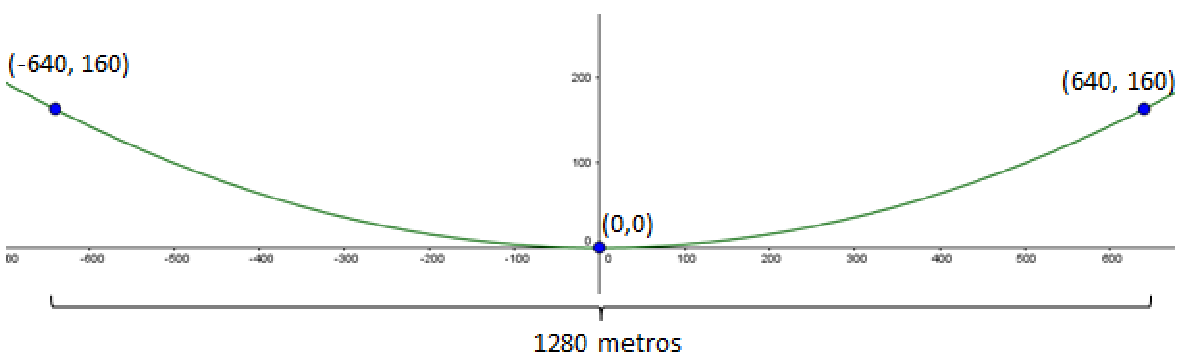
PM.6 Determinar los valores de las incógnitas debe ser preciso para no obtener funciones que no modelen realmente los valores de la tabla.

Situación 1.9: El puente Golden Gate enmarca la entrada a la bahía de San Francisco. Sus torres de 160 metros de altura y están separadas por una distancia de 1280 metros. El puente está suspendido de dos enormes cables que forman una parábola.

a) Determina la función que modela la altura del cable en cualquier posición x de la calzada, donde la posición (0,0) es el centro del puente (vértice de la parábola).
b) Si un automóvil se encuentra a 400 metros del centro del puente, ¿cuál es la altura del cable en esa posición?

Respuesta 1.9:

a) Trasladando el puente al plano cartesiano tenemos los siguientes puntos: (-640, 160), (0, 0), (640, 160) con los que puedo construir la función que modela la parábola $f(x) = Ax^2 + Bx + C$



Se resuelve el sistema de ecuaciones

$$0 = A(0)^2 + B(0) + C$$

$$160 = A(640)^2 + B(640) + C$$

$$160 = A(-640)^2 + B(-640) + C$$

Se tiene $A = 0.000390625, B = 0\ y\ C = 0$, por lo tanto la altura del cable será $f(x) = 0.000390625x^2$ para cualquier posición x sobre la calzada

b) Si el automóvil se encuentra a 400 metros sobre la calzada, la altura de la cuerda será:

$$f(400) = 0.000390625(400)^2$$

$$f(400) = 62.5\, metros$$

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Después de analizar los puntos por los que pasa el cable del puente, los estudiantes tendrán que determinar cuál es la función $f(x)$ que lo modela.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Al determinar que deben evaluar los puntos en la forma general de la cuadrática, parten de un razonamiento abstracto a uno cuantitativo.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder determinar la función cuadrática que modela el cable del puente, el estudiante deberá construir argumentos viables que lo llevaron a obtenerla. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* El estudiante modelará con una función el cable del puente usando los datos dados y la imagen aportada.

PM.5 *Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.* Al tener 3 incógnitas necesita los 3 puntos dados para determinar la función cuadrática que los modela, el estudiante debe resolver el sistema por algún método como una herramienta estratégica.

PM.6 *Asista a la precisión.* Determinar los valores de las incógnitas debe ser preciso para no obtener funciones que no modelen realmente los puntos del cable.

Situación 1.10: En las situaciones anteriores se han construido las funciones cuadráticas que modelan algunos fenómenos usando 3 puntos.

a) ¿Puedo construir una función cuadrática con los siguientes 3 puntos: (1,9), (2, 12), (5, 21)?
b) ¿Qué puedes conjeturar con respecto al uso de 3 puntos para construir la función cuadrática?

Respuesta 1.10:

a) Para construir la función cuadrática $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ se resuelve:

$$9 = A(1)^2 + B(1) + C$$

$$12 = A(2)^2 + B(2) + C$$

$$21 = A(5)^2 + B(5) + C$$

Dónde: $A = 0, B = 3\ y\ C = 6$, es decir $f(x) = 3x + 6$ no es una función cuadrática, se construye una función lineal.

b) Si se sabe que 3 puntos cualesquiera provienen de un fenómeno que se modela con una cuadrática, si puedo construir la función (como las situaciones 1.6 y 1.7). Si se tienen al menos 4 puntos se pueden obtener las segundas diferencias y determinar si es una cuadrática para construir la función (es importante también el contexto como en la situación 1.5). Pero teniendo 3 puntos sin un contexto no se puede asegurar la construcción de una función cuadrática, puede suceder que provienen de una lineal. En conclusión, con 3 puntos siempre construyo una cuadrática o una lineal y es muy importante el contexto.

Nota al profesor: El profesor debe asegurarse que el estudiante analice todos los posibles escenarios que se han resuelto en las situaciones anteriores y concluya que con 3 puntos siempre construyo una cuadrática o una lineal.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Al determinar que deben evaluar los puntos en la forma general de la cuadrática y encontrar una función lineal, parten de un razonamiento abstracto a uno cuantitativo.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder determinar que los 3 puntos dados no provienen función cuadrática sino de una lineal, el estudiante deberá construir argumentos viables. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* El estudiante modelará con una función lineal los puntos dados.

PM.5 *Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.* Al tener 3 incógnitas necesita los 3 puntos dados para determinar la función que los modela, el estudiante debe resolver el sistema por algún método como una herramienta estratégica.

PM.6 *Asista a la precisión.* El estudiante debe ser preciso para darse cuenta que los 3 puntos pertenecen a una función lineal y que no siempre se puede construir una función cuadrática con 3 puntos.

Situación 1.11: Una empresa registra las ganancias que puede obtener de la venta de sus artículos de acuerdo al precio fijado. Si se sabe que las ganancias $f(x)$ con respecto al precio x del artículo pueden ser modeladas por una función cuadrática y se tienen los siguientes registros:

Precio	**Ganancia**
$100	$490,000
$200	$1´020,000
$500	$1´410,000

a) Determina la función cuadrática que modela las ganancias de la empresa
b) ¿Puedes obtener la ganancia máxima por la venta de artículos? Argumenta tu respuesta.

Respuesta 1.12:

a) Resolviendo el sistema de ecuaciones 3x3 se tiene: $f(x) = -10x^2 + 8300x - 240000$

b) Si el estudiante grafica la función se dará cuenta que no es fácil determinar cuál es el punto máximo, no cuenta con una herramienta para poder resolver el problema.

Nota al profesor: El profesor aprovecha el momento para hacer una introducción a la siguiente sesión *Cuadráticas en forma de vértice* como una forma diferente de escribir la función cuadrática y encontrar el máximo o mínimo de la parábola.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Después de analizar la tabla que registra las ganancias por la venta de artículos, los estudiantes tendrán que determinar cuál es la función $f(x)$ que la modela en su forma general.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Al determinar que deben evaluar los puntos de la tabla en la forma general de la cuadrática, parten de un razonamiento abstracto a uno cuantitativo.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder determinar la función cuadrática que modela las ganancias por la venta de artículos, el estudiante deberá construir argumentos viables que lo llevaron a obtenerla. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* El estudiante modelará con una función las ganancias por la venta de artículos usando los datos de la tabla.

PM.5 *Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.* Al tener 3 incógnitas necesita los 3 puntos dados para determinar la función cuadrática que los modela, el estudiante debe resolver el sistema por algún método como una herramienta estratégica.

PM.6 *Asista a la precisión.* El estudiante debe ser preciso para darse cuenta que no puede determinar cuál es el punto máximo con la función que modeló y necesita una herramienta más.

PROBLEMAS PERSONALES

Situación 1.1P: Una constructora registra el número de metros cúbicos de agua que deben utilizarse en el llenado de piscinas circulares de 2 metros de profundidad y que tienen diferentes radios, obteniendo la siguiente tabla:

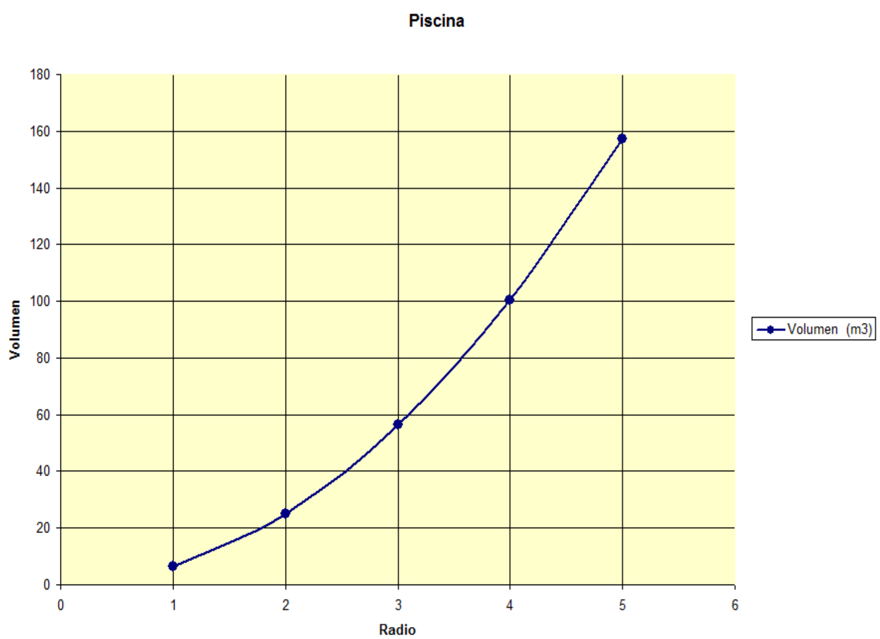
Radio (m)	**Volumen (m^3)**
1	6.2832
2	25.1326

3	56.5486
4	100.5308
5	157.0796

¿Esta situación está modelada por una función cuadrática?

Respuesta 1.1P: Las diferencias obtenidas son: 18.8494, 31.4160, 43.9822 y 56.5488. Como las segundas diferencias son siempre de 12.566, entonces la situación sí está modelada por una función cuadrática.

El estudiante puede realizar la gráfica:



Situación 1.2P: En un colegio, los registros muestran que la calificación promedio, C, de un alumno es una función del número t de horas que éste estudia y destina a realizar tareas por semana; obteniéndose la siguiente tabla:

t	**C(t)**
0	1.2
1	1.41
2	1.64
3	1.89

4	2.16
5	2.45
6	2.76
7	3.09
8	3.44

a) La calificación promedio C, como función del número de horas t, ¿es una función cuadrática?
b) Encuentra la ecuación que modela a dicha función.
c) ¿Cuál es la calificación promedio esperada por el alumno que estudia y realiza tareas 12 horas a la semana?
d) ¿Cuántas horas a la semana deberá estudiar un alumno para que su calificación promedio sea 10?
e) Describe la gráfica de la función "calificación promedio", considerando su dominio como el conjunto de todos los números reales mayores o iguales a 0.

Situación adaptada del libro "Álgebra intermedia" de Allen R. Ángel

Respuesta 1.2P:

a) Para determinar si la función es cuadrática, calculamos sus primeras y segundas diferencias. Como las segundas diferencias siempre valen 0.02, la función es cuadrática.

b) La ecuación que modela esta función tiene la forma general: $C(t) = At^2 + Bt + C$. Tomando 3 valores de la tabla (0, 1.2), (1, 1.41), (2, 1.64), podemos calcular A, B y C. De este modo, la ecuación que modela la función "calificación promedio" es: $C(t) = 0.01t^2 + 0.2t + 1.2$

c) $C(12) = 0.01(12)^2 + 0.2(12) + 1.2 = 5.04$, es decir, el alumno que estudia 12 horas a la semana se espera que obtenga una calificación promedio de 5.04.

d) Para responder este inciso, debemos resolver la ecuación cuadrática:

$$0.01t^2 + 0.2t + 1.2 = 10$$

Es decir, cuando:

$$0.01t^2 + 0.2t - 8.8 = 0$$

Utilizando la fórmula general, completar cuadrados o con una calculadora online se obtiene que: $t = 21.3$ ó $t = -41.3$

De aquí que, el estudiante deberá estudiar 21.3 horas a la semana para obtener una calificación promedio de 10.

Nota al profesor: Algunas ligas en donde se puede encontrar una calculadora online es

http://es.onlinemschool.com/math/assistance/equation/quadratic/

http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/ecuaciones-cuadraticas-solucionador.html

Situación 1.3P: Se deja caer un objeto en reposo y se mide la distancia d, en metros, que recorre el objeto, t segundos después del punto de partida, obteniendo la siguiente tabla:

Tiempo t (segundos)	**Distancia d (metros)**
0	0
1	4.9
2	19.6
3	44.1
4	78.4
5	122.5

a) Determina la función que modela los datos de la tabla
b) Suponiendo que se sigue esta tendencia en los puntos ¿Cuántos metros recorrerá el objeto después de 6 segundos?
c) Realiza la gráfica de la función.

Situación adaptada del documento digital "Ministerio de educación del Ecuador: texto de matemáticas, bachillerato general unificado"

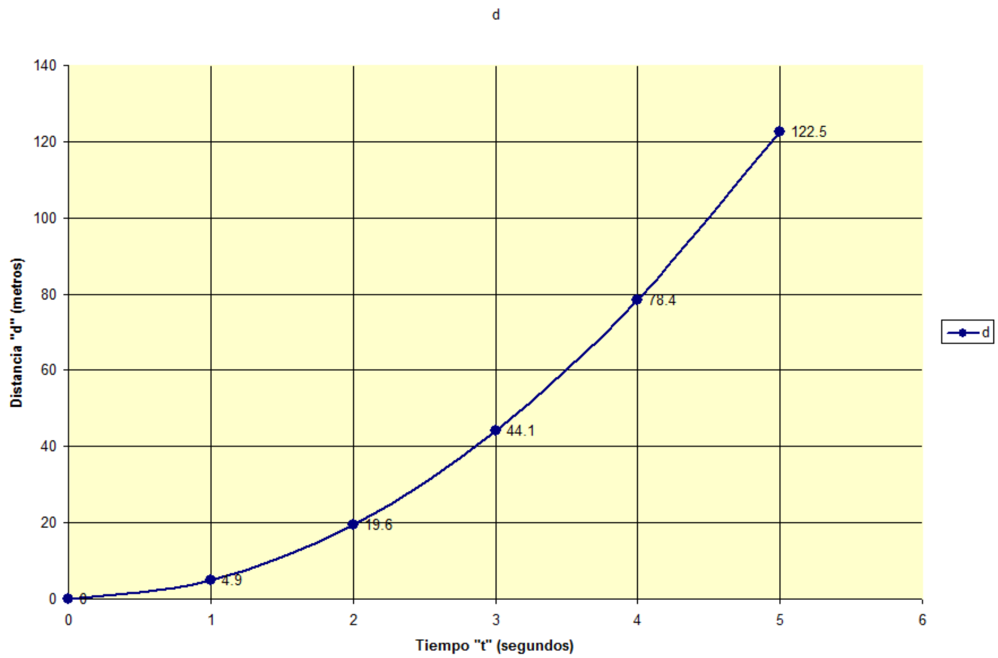
Respuesta 1.3P:

a) Las segundas diferencias siempre toman el valor de 9.8 (valor de la aceleración gravitacional de la Tierra en m/s^2) y, en consecuencia, la función representada por la tabla es una función cuadrática.

Si se considera la distancia d como función del tiempo t, $d(t) = At^2 + Bt + C$. Para encontrar los valores de $A, B\ y\ C$, se utilizarán tres valores de la tabla (0,0), (1, 4.9), (2, 19.6). De este modo, la ecuación que modela la función es $d(t) = 4.9t^2$.

b) Después de 6 segundos, el objeto recorre $d(6) = 4.9(6)^2 = 176.4$ metros.

c) Gráfica:


d
140
120
100
80
60
40
20
0
Distancia "d" (metros)
122.5
78.4
44.1
19.6
4.9
0
0
1
2
3
4
5
6
Tiempo "t" (segundos)
d

SESIÓN 2: CUADRÁTICAS EN FORMA DE VÉRTICE (FORMA NORMAL)

Estándares del CCSSM que se promueven:

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

PM.4 Modelar con las matemáticas.

PM.5 Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.

PM.6 Asista a la precisión.

PM.7 Buscar y hacer uso de la estructura.

Competencias específicas:

En esta sesión el estudiante:

1. Grafica una función cuadrática a partir de su expresión algebraica

2. Reconoce un máximo o mínimo de una función cuadrática en cualquier representación

3. Modela (obtener una expresión algebraica) una función cuadrática a partir de gráficas o problemas verbales contextualizados y no contextualizados

Situación 2.1: Encontrar los siguientes binomios elevados al cuadrado

$(x-5)^2$

$(x-3)^2$

$(x+1)^2$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

$4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$

¿Puedes relacionar los términos del resultado con los del binomio inicial? ¿Qué puedes conjeturar (deducir)?

Respuesta 2.1: $x^2-10x+25,\ x^2-6x+9,\ x^2+2x+1,\ x^2+x+\frac{1}{4},\ 4x^2-12x+9$

Nota al profesor: Se espera que los estudiantes relacionen el binomio al cuadrado $(x \pm h)^2$ con el resultado $x^2\ +\ \pm 2(x \cdot h)\ +\ h^2$, observando que el primer término del resultado se encuentra elevando al cuadrado el primer término del binomio (x^2), el segundo término es ± el doble producto del primer término por el segundo del binomio ($\pm 2(x \cdot h)$), y el tercer término es el segundo término del binomio al cuadrado (h^2). Posteriormente será útil en la factorización.

Situación 2.2:

a) Factorizar la siguiente función a binomio cuadrado perfecto, tomando en cuenta el resultado anterior.

$$n(x) = 2x^2 + 8x + 8$$

a) Factorizar las siguientes funciones usando el primero y segundo término, ¿cómo debe ser c para que se satisfaga que $f(x)$ es un binomio cuadrado perfecto?

$$f(x) = x^2 - 8x + c$$

$$f(x) = 3\left(x^2 + \frac{9}{3}x + \frac{c}{3}\right)$$

Respuesta 2.2:

a) $2(x+2)^2$,

b) $f(x) = \ (x-4)^2,\ c = 16\ \ y\ \ f(x) = 3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2, c = \frac{27}{4}$

En general, si x^2 está multiplicado por algún factor, primero se debe sacar como factor común $f(x) = 3\left(x^2 + \frac{9}{3}x + \frac{c}{3}\right)$. Enfocarse ahora a factorizar $f(x) = x^2 + 3x + \frac{c}{3}$, en el cual se debe obtener raíz cuadrada del primer término: $\sqrt{x^2}$, para encontrar el primer término del binomio; dividir entre 2 el segundo término (tomar en cuenta los signos): $\frac{3}{2}$, para encontrar el segundo término del binomio; de lo que se obtiene $f(x) = 3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 3\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) = 3x^2 + 9x + \frac{27}{4}$, finalmente comprobar que el tercer término es $\frac{27}{4} = c$.

Esta parte debe quedar bien clara porque se usará cuando las funciones no son cuadrados perfectos.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM (situaciones 2.1 y 2.2)

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Los estudiantes realizarán y probarán las conjeturas que encuentren en la relación de los términos de un binomio cuadrado perfecto y los términos de su resultado; para poder pasar del binomio al resultado y viceversa.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para pasar de un binomio cuadrado perfecto a su trinomio de solución y viceversa, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir de las conjeturas hechas y comprobadas. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.6 *Asista a la precisión.* Cuando encuentren los binomios cuadrados perfectos de la situación 1.1, los estudiantes deben asegurarse de que sus cálculos son correctos, ya que si los factores no se multiplican cuidadosamente, resultarán conjeturas erróneas.

PM.7 *Buscar y hacer uso de la estructura.* En la situación 1.2 se requiere que los estudiantes examinen cómo son los coeficientes del trinomio para regresar a la estructura del binomio cuadrado perfecto. Las situaciones requieren que los estudiantes comparen las expresiones equivalentes en diferentes estructuras.

Situación 2.3: Para las funciones que no se pueden factorizar en binomios cuadrados perfectos las podemos "completar" agregando o quitando el número necesario al binomio, para que se satisfaga el último término "c", como se observó que debía satisfacerse en la situación 2.2

Factorizar las siguientes funciones (completar cuadrados), de manera que tengan la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, donde a, h y k son constantes.

$h(x) = 2x^2 - 4x + 5$

$g(x) = 3x^2 + 18x + 28$

$p(x) = -x^2 - 4x + 4$

$n(x) = x^2 - 10x$

Respuesta 2.3: $h(x) = 2(x - 1)^2 + 3,\ g(x) = 3(x - 3)^2 + 1,\ p(x) = -(x + 2)^2 + 8$

Si hay problemas para hacer la factorización de cualquier trinomio $f(x) = ax^2 + bx + c$, ayudar a los estudiantes mediante preguntas como, ¿cuál es el factor que debemos sacar primero de la ecuación? Para que se den cuenta que deben llegar a: $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$. Seguir haciendo preguntas para que el término $\frac{b}{a}$, lo dividan entre dos y obtengan el segundo término del binomio, es decir, de la forma $f(x) = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2$ como se hizo en la situación anterior. Al realizar ese binomio, notar que lo que sobra o lo que falta a $a\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ para ser c, es la constante k. Concluir esta situación aclarando a los estudiantes que cualquier función cuadrática puede ser escrita de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Esta es una parte algebraicamente difícil para algunos estudiantes, si no está bien claro, se sugiere poner más problemas para que los factoricen.

Nota al profesor: Si el estudiante tiene dificultades puede ver los siguientes videos:

Ver: Proceso para completar cuadrados

https://www.youtube.com/watch?v=xHrcvJTiK1I

Ver: Proceso para completar cuadrados

https://www.youtube.com/watch?v=F51pLctp69c

Ver: Utilidad de completar cuadrados y un algoritmo

https://www.youtube.com/watch?v=4w1r4IHUXPI

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Los estudiantes harán y probarán nuevas conjeturas usando las que encontraron anteriormente agregando qué necesitan completarle al binomio.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para pasar de un trinomio a su factorización en un binomio cuadrado perfecto más su completitud, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir de las conjeturas hechas y comprobadas. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.6 *Asista a la precisión.* Los estudiantes deben asegurarse de que sus cálculos son correctos, ya que si los factores no se multiplican cuidadosamente, resultarán conjeturas erróneas.

PM.7 *Buscar y hacer uso de la estructura.* De las situaciones anteriores los estudiantes deberán observar la estructura que guarda un binomio cuadrado perfecto y usarla en esta situación. Se requerirá que los estudiantes la comparen con la expresión dada y analicen qué necesitan completarle al binomio para llegar a la estructura que se pide.

Situación 2.4: La función cuadrática $p(x) = 3x^2 - 6x + 5$ es llevada a su forma de vértice $p(x) = 3(x-1)^2 + 2$, realiza lo que sigue:

a) Analiza algunos de los posibles valores de x, ¿cómo es la expresión $(x-1)^2$ (tiene resultados positivos, negativos, cero)?
b) Tomando en cuenta que 3 es positivo, ¿cómo es la expresión $3(x-1)^2$?
c) ¿Cuál es el valor menor que puede tomar la expresión $3(x-1)^2$?
d) ¿Cuál es el valor de x necesario para que la expresión anterior alcance su valor más pequeño (mínimo)?
e) Sustituyendo el valor de x del inciso anterior en la forma de vértice, ¿qué valor toma $p(x)$?
f) ¿Cuáles son las coordenadas del punto mínimo?

Respuesta 2.4: Apoyar a los estudiantes para que determinen que independientemente del valor de x como $(x-1)^2$ esta elevado al cuadrado será mayor o igual a 0 siempre. Multiplicado por a que es positiva, $3(x-1)^2$ es mayor o igual a 0 para todo *x*. Por lo tanto el valor más pequeño que puede tomar $3(x-1)^2$ es cero, y esto se da cuando $x = 1$ y así $p(x) = 2$. Es decir, el mínimo de la cuadrática se da en $x = 1$ *y* $p(x) = 2$*,* así el vértice está en el punto *v* = (*1*, *2*) y la gráfica abre hacia arriba.

Situación 2.5: La función cuadrática $g(x) = -3x^2 + 12x - 11$ es llevada a su forma de vértice $g(x) = -3(x-2)^2 + 1$, realiza lo que sigue:

a) Analiza algunos de los posibles valores de x, ¿cómo es la expresión $(x-2)^2$(tiene resultados positivos, negativos, cero)?
b) Tomando en cuenta que -3 es negativo, ¿cómo es la expresión $-3(x-2)^2$?
c) ¿Cuál es el valor mayor que puede tomar la expresión $-3(x-2)^2$?

d) ¿Cuál es el valor de x necesario para que la expresión anterior alcance su valor más grande (máximo)?
e) Sustituyendo el valor de x del inciso anterior en la forma de vértice, ¿qué valor toma $g(x)$?
f) ¿Cuáles son las coordenadas del punto máximo?

Respuesta 2.5: Apoyar a los estudiantes de la misma manera que el ejercicio anterior para que determinen que independientemente del valor de x como $(x-2)^2$ esta elevado al cuadrado será mayor o igual a 0 siempre. Multiplicado por $a=-3$ que es negativo, $-3(x-2)^2$ es menor que o igual a 0 para todo x, y por lo tanto el valor más grande que puede tomar $-3(x-2)^2$ es cero, y esto se da cuando $x=2$ y así $g(x)=1$. Es decir, el máximo de la cuadrática se da en $x=2$ *y* $g(x)=1$, así el vértice está en el punto *v* = (*2*, *1*) y la gráfica abre hacia abajo. Finalizar diciendo que en general la función cuadrática en forma de vértice $g(x)=a(x-h)^2+k$ nos permite saber cómo es la gráfica de dicha función: si $a>0$ abre hacia arriba, si $a<0$ abre hacia abajo y v(h, k) es el vértice, que será el mínimo o máximo respectivamente. Que les quede bien claro que este procedimiento es para darle sentido a las coordenadas del vértice y posteriormente pueden solo usar h y k sin hacer el análisis anterior; por lo tanto, ya saben de dónde surge la forma de vértice y no es una simple fórmula dada que pueden olvidar.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM (situaciones 2.4 y 2.5)

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Los estudiantes analizarán los valores que pueden tomar las variables de la forma de vértice para ver cómo se comporta su gráfica, y así le den sentido a este cambio de estructura a partir de la forma cuadrática general.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder analizar cómo es la gráfica de una función cuadrática a partir de la forma de vértice, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del análisis hecho en la forma de vértice. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.6 *Asista a la precisión.* Los estudiantes deben asegurarse de que sus cálculos son correctos. Si los factores no se multiplican cuidadosamente, resultarán conjeturas erróneas.

PM.7 *Buscar y hacer uso de la estructura.* Los estudiantes deberán observar la estructura que guarda la gráfica de la forma de vértice, para generalizarla y poderla aplicar posteriormente a cualquier otra situación.

Situación 2.6: Usar algún software libre (por ejemplo Desmos) para graficar y encontrar el vértice e intersecciones con el eje *x* de las siguientes funciones cuadráticas:

$h(x)=2x^2-4x+5$

$g(x)=3x^2+18x+28$

$p(x)=-x^2-4x+4$

$n(x)=x^2-10x$

Comparar tus resultados con las factorizaciones hechas en la situación 2.3

Respuesta 2.6: Finalizar diciendo a los estudiantes la importancia del uso de las TIC ya que si se tiene esta herramienta de apoyo, no se pierde el tiempo haciendo factorizaciones para graficar y utilizarlo en la interpretación de esas gráficas.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Los estudiantes podrán darle sentido al uso de las TIC al observar que el procedimiento para obtener la forma de vértice se puede hacer de manera ágil y práctica con el uso de la computadora como una herramienta auxiliar.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder comprar los resultados obtenidos con Desmos y los obtenidos algebraicamente, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir de la comparación de sus resultados Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

Situación 2.7: El precio de un vuelo en cierta aerolínea varía de acuerdo al número de pasajeros. Si exactamente 200 personas se registran en el vuelo, el precio por persona es de $300 dólares, es decir, la aerolínea tiene un ingreso de $60,000.00 dólares. Sin embargo, si más de 200 personas se registran, el precio del vuelo se reduce un dólar por cada persona adicional. Sea x el número de pasajeros superior a 200:

a) Determine la función que modele el ingreso obtenido por la aerolínea.
b) ¿Cuál es el ingreso máximo que puede obtener la aerolínea?
c) Obtenga el número de pasajeros necesarios para tener un ingreso de $61,600 dólares.
d) Determine una función que modele el número de pasajeros superior a 200 de acuerdo al ingreso. ¿Cómo es esta función con respecto a la obtenida en a)?

Respuesta 2.7:

a) Ingreso= (Número de personas) (precio del vuelo)

$$\text{Ingreso} = (200 + x)(300 - x)$$

$$I = -x^2 + 100x + 60000$$

b) Completando cuadrados se obtiene: $I = -(x - 50)^2 + 62500$, por lo tanto el punto máximo es $(50, 62500)$, es decir el ingreso máximo es de $62,500 dólares obtenidos con 250 pasajeros. También pueden resolver usando Desmos.

c) Puede haber 2 posibles caminos de solución, uno usando la forma general:

$$61600 = -x^2 + 100x + 60000$$

$$-x^2 + 100x - 1600 = 0$$

$$(x - 20)(-x + 80) = 0$$

$$x = 20 \; o \; x = 80$$

O usando la forma de vértice

$$61600 = -(x - 50)^2 + 62500$$

$$900 = (x - 50)^2$$

$$\sqrt{900} = x - 50$$

$$\pm 30 = x - 50$$

$$x = 20 \; o \; x = 80$$

Por lo tanto el número de pasajeros adicionales a los 200 deben ser 20 u 80, es decir con 220 o 280 pasajeros se obtiene un ingreso de $61,600 dólares

Nota al profesor: EL estudiante debe observar que está despejando x de la ecuación, para poder generalizar lo que debe hacer en la siguiente situación.

c) De la forma general $I = -x^2 + 100x + 60000$ no es posible despejar x, por lo tanto se usa la forma de vértice:

$$I = -(x - 50)^2 + 62500$$

$$62500 - I = (x - 50)^2$$

$$\sqrt{62500 - I} = x - 50$$

$$x = \sqrt{62500 - I} + 50$$

Esta es la *función inversa* del ingreso I

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

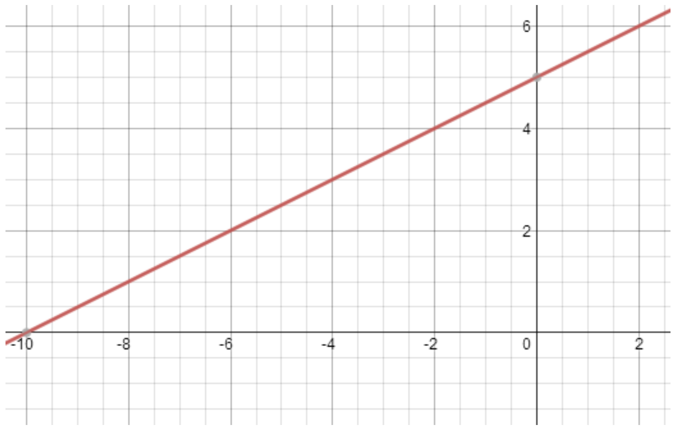
PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Se les presenta a los estudiantes un problema de la vida real con el objetivo de motivarlos a resolverlo.

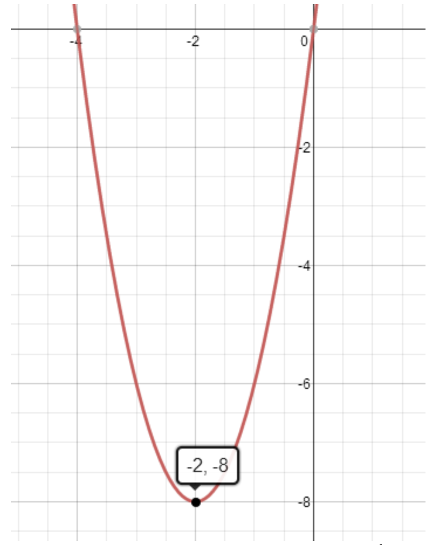
PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para crear los modelos matemáticos y obtener el máximo que se pide, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del análisis y el cambio de la forma general de la cuadrática a la de vértice. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* Los estudiantes podrán encontrar la expresión algebraica que modele el ingreso de la aerolínea y su función inversa.

PM.6 *Asista a la precisión.* Los estudiantes deben asegurarse de que sus cálculos son correctos, ya que podrán obtener funciones que no modelen la situación.

Situación 2.8: Escribe las funciones que modelen cada una de las siguientes gráficas e identifica su dominio y rango:





Respuesta 2.8: Para la primera gráfica, de los puntos (-10, 0) y (0, 5) obtenemos $m = \frac{1}{2}$ y la intersección con el eje y es $b = 5$, así la función es $f(x) = \frac{x}{2} + 5$, el dominio y rango son (-∞, ∞)

En la segunda gráfica, se observa que $h = -2$ y $k = -8$, para obtener a usamos la forma de vértice evaluada en el punto (0, 0) ya que la gráfica pasa por ahí:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

$$0 = a(0-(-2))^2 + (-8)$$

$$0 = a(2)^2 - 8$$

$$4a = 8$$

$$a = 2$$

Así la función que modela la gráfica es: $f(x) = 2(x+2)^2 - 8 = 2x^2 + 8x$, el dominio es (-∞, ∞) y el rango es (-8, ∞)

Notas al profesor: En caso de que el estudiante tenga dificultades al usar el álgebra en el algoritmo para encontrar la función cuadrática se puede auxiliar con los siguientes videos

Ver: Modelar una función cuadrática dados dos puntos, vértice y un punto por donde pasa la función

https://www.youtube.com/watch?v=XYiPFwwRt_s

1.- La primera gráfica está hecha para que el estudiante repase los conocimientos de las unidades anteriores y para que no se confíe que todos los problemas serán específicos de la unidad.

2.- El estudiante puede confundirse con los valores de h y k, es importante que quede bien claro que k puede ser negativo o positivo, así como también $-h$ puede ser negativo o positivo, dependerá del valor de k y de h respectivamente.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Los estudiantes podrán darle sentido a los cálculos algebraicos hechos anteriormente al modelar una gráfica obteniendo su función cuadrática, a partir de su vértice y cualquier otro punto.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder encontrar cuál es la expresión algebraica que modela una parábola y una línea recta, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir de la forma de vértice de una cuadrática, y de la forma pendiente y punto de intersección con el eje y respectivamente. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* Los estudiantes podrán encontrar la expresión algebraica que modele cualquier parábola teniendo su vértice y otro punto por el que pase dicha gráfica.

PM.6 *Asista a la precisión.* Los estudiantes deben asegurarse de que sus cálculos son correctos. Además debe tener bien claro que por ejemplo, k puede ser negativo o positivo, así como también $-h$ puede ser negativo o positivo, dependerá del valor de h. Ya que podrán encontrar expresiones algebraicas erróneas que no modelarán la gráfica pedida.

Situaciones 2.9 a 2.3P están basadas en problemas del libro ***Precálculo. Matemáticas para el Cálculo (2007) de*** **Steward, J., Redlin, L., Watson, S**

Situación 2.9: Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender x cantidad de pizarrones está dado por la función $R(x) = 40x - 0.2x^2$,¿Cuál es el ingreso máximo y cuántos pizarrones se tienen que fabricar para obtener ese máximo?

Respuesta 2.9: Graficando con Desmos obtenemos que el punto máximo se da en (100, 2000), es decir, Se tienen que fabricar 100 pizarrones y se obtiene una ganancia máxima de $2,000.00

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Los estudiantes podrán darle sentido a una función cuadrática ya que expresa un modelo del ingreso de venta, que es una situación de la vida real.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder encontrar cuál es el ingreso máximo de venta de pizarrones, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir de la forma de vértice de una cuadrática usando técnicas algebraicas o el Desmos. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM. 5 *Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.* Los estudiantes podrán encontrar el máximo de ingresos de venta de diferentes maneras, de ellos dependerá cuál consideran la herramienta más adecuada de acuerdo al problema. La estrategia que pueden utilizar es el software Desmos.

PM.6 *Asista a la precisión.* Si lo resuelven con técnicas algebraicas, los estudiantes deben asegurarse de que sus cálculos son correctos, ya que podrán encontrar los valores de un máximo incorrecto.

PROBLEMAS PERSONALES

Situación 2.1P: Cuando el paracetamol se toma oralmente su concentración en el torrente sanguíneo del paciente después de t minuto está dada por $C(t) = 0.3t - 0.002t^2$, la concentración se mide en mg/L ¿Cuándo se alcanza la concentración máxima? ¿Cuándo elimina el cuerpo la concentración de paracetamol?

Situación 2.2P: El número de mangos que produce cada árbol en una huerta depende de la densidad de árboles plantados. Si se plantan n árboles en una hectárea de tierra, entonces cada árbol produce 450-5n mangos.

¿Cuál es el número de mangos producidos por hectárea?

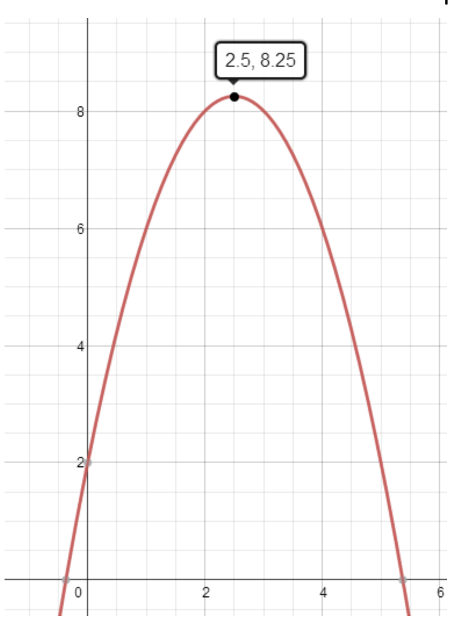
¿Cuántos árboles por hectárea se tienen que sembrar a fin de obtener la producción máxima de mangos?

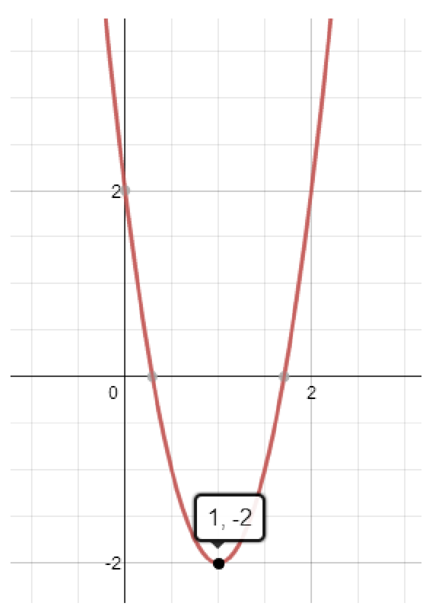
Situación 2.3P: La efectividad de un comercial de televisión depende de cuantas veces lo vea un televidente. Después de algunos experimentos, una agencia de publicidad encuentra que si la efectividad E se mide en una escala de 0 a 10, entonces,

$$E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2$$

Donde n es el número de veces que un televidente ve un determinado comercial. Para que un comercial tenga efectividad máxima, ¿Cuántas veces lo tiene que ver un televidente?

Situación 2.4P: Escribe las funciones que modelen las siguientes gráficas:





Situación 2.5P: Un almacén de semillas registra la utilidad $U(x)$ obtenida por la cantidad x de costales de harina vendidos y los registra en una tabla como sigue:

x	99	100	101	102	103
$U(x)$	2997	3000	2997	2988	2973

a) ¿Qué tipo de función es?
b) ¿Cuántos costales nos dan una utilidad máxima? ¿Cuál es esa utilidad?
c) ¿Cuál es la función $U(x)$ que modela la utilidad de venta de cualquier cantidad de costales de harina x?