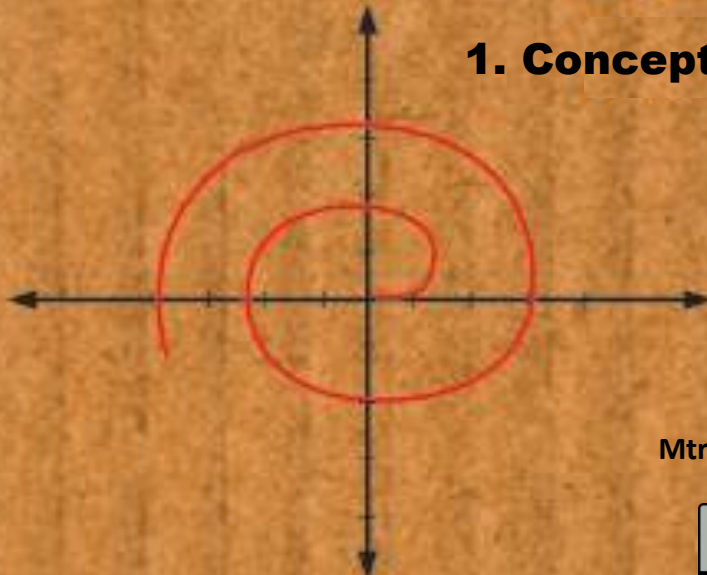


Cálculo

1. Concepto de función



Mtra. Zenaida Avila Aguilar



*Universidad
Veracruzana*



RECOMENDACIONES GENERALES PARA EL PROFESOR

Pondrá énfasis en el trabajo que los alumnos desarrollarán en el aula. Esto supone aclarar a los estudiantes que deberán realizar, como trabajo extra escolar de cada a sesión, las actividades que se describen a continuación:

Resolver un problema que no haya sido resuelto en el aula a lo largo de las sesiones. El problema puede ser elegido de la lista de problemas a ser resueltos como trabajo individual que aparece al final de la sesión.

Construir y resolver un problema que requiera la aplicación de los conceptos dados en la sesión y que esté relacionado con su área de estudio de interés.

Describir el proceso que han seguido para verificar el resultado del problema que haya resuelto. Consideramos necesario que el profesor o el monitor programe, en cada sesión, las siguientes actividades:

Intervención del profesor, exposición de los estudiantes, trabajo en equipo, trabajo individual y discusión.

A continuación, describimos brevemente cada una de las actividades que mencionamos en el párrafo anterior. Cabe mencionar que el orden en que las presentamos, no guarda relación con su importancia.

La descripción de las mencionadas actividades no supone que deban realizarse exhaustivamente en una clase de 50 minutos.

Intervención del profesor

Las intervenciones del profesor, al introducir un tema, han de ser cortas. En todo caso, han de producirse con la finalidad de orientar a los estudiantes en aspectos concretos como:

- a) Establecer los objetivos particulares.
- b) Describir la forma de organizar el trabajo de los equipos y en el aula.
- c) Explicar procedimientos, hechos o heurísticas que permitan a los estudiantes avanzar en la resolución de un problema.

Exposiciones de los estudiantes

Las intervenciones de los estudiantes pueden ser de manera individual o por equipos para:

- a) Presentar sus argumentos.
- b) Dirimir ideas que puedan parecer contrarias entre uno o más miembros del equipo.
- c) Presentar el proceso de resolución de un problema.

- d) Presentar el proceso de resolución de algún problema dado como trabajo extra escolar;
- e) Presentar trabajos o tareas a desarrollar fuera del aula.

Trabajo en equipo

Los equipos podrán integrarse con dos o tres estudiantes. El trabajo en equipo tiene como propósito proporcionar a los estudiantes un contexto más o menos estable y continuo para enfrentar colectivamente la resolución de problemas. Se sugiere dedicar a esta actividad el tiempo suficiente en cada sesión para resolver los problemas planteados.

Trabajo individual

El trabajo individual tiene como propósito evaluar el trabajo de cada estudiante fuera de la sesión. La frecuencia y grado de participación puede obtenerse a partir de la participación individual en el aula o, bien, a partir de los reportes escritos que formen parte del portafolio de trabajo de cada estudiante.

Discusión general

Esta actividad ha de permitir a los estudiantes escuchar y valorar las preguntas y comentarios de sus compañeros; corregir errores cometidos en el proceso de resolución de un problema o aprender a sustentar sus ideas.

El trabajo cotidiano consiste, fundamentalmente, en la resolución de problemas de diferentes grados de dificultad. Así, la colección de problemas que proponemos puede facilitar el propósito del profesor

ESTÁNDARES PARA LA PRÁCTICA MATEMÁTICA DEL COMMON CORE STATE STANDARDS FOR MATHEMATICS (CCSSM)

Para saber cuáles son los aprendizajes que se promueven en cada situación didáctica, nos basaremos en los ocho Estándares para la Práctica Matemática de las Funciones establecidas en el Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM) para el nivel universitario. Estos estándares pueden ser considerados como elementos fundamentales de la resolución de problemas matemáticos:

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

PM.4 Modelar con las matemáticas.

PM.5 Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.

PM.6 Asista a la precisión.

PM.7 Buscar y hacer uso de la estructura.

PM.8 Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido. (CCSSI 2010)

ÍNDICE

UNIDAD 1: CONCEPTO DE FUNCIÓN

Sesión 1: Diagramas de Relaciones	5
Sesión 2: Tablas de relaciones	13
Sesión 3: Pares ordenados	20
Sesión 4: Gráficas	25
Sesión 5: Relación algebraica (ecuación)	35

UNIDAD 1: EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

SESIÓN 1: DIAGRAMAS DE RELACIONES

Estándares del CCSSM que se promueven:

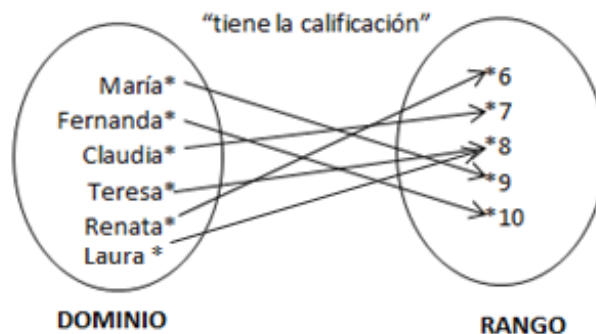
- PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.*
- PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.*
- PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.*
- PM.4 Modelar con las matemáticas.*

Competencias específicas:

En esta sesión el estudiante:

- 1. Dibuja diagramas de relaciones a partir de un problema verbal contextualizado*
- 2. Reconoce el dominio y rango de un diagrama de relación de una situación contextualizada y no contextualizada*
- 3. Aplica el concepto de función para distinguir si un diagrama de relación es una función o no.*

Situación 1.1: Un grupo de amigas obtuvieron las siguientes calificaciones: María 9, Fernanda 10, Claudia 7, Teresa 8, Renata 6 y Laura 8. De esta información se obtiene el diagrama:



¿Qué observas de las relaciones?

Respuesta 1.1:

El estudiante con apoyo del profesor observará que cada elemento del dominio está relacionado con uno del rango (notar que Teresa y Laura están relacionadas con 8, pero están relacionadas con sólo uno del rango aunque sea el mismo elemento).

El profesor aprovecha el momento para introducir el concepto:

Una función es una correspondencia entre los elementos de un conjunto llamado *dominio* y los elementos de un segundo conjunto llamado el *rango* tal que para cada uno de los elementos del dominio le corresponde exactamente un elemento del rango.

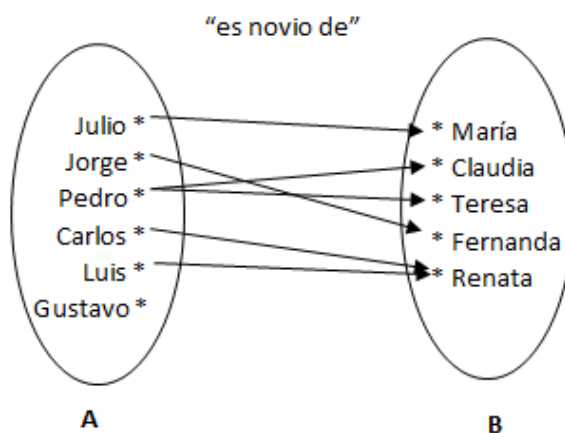
Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Para darle sentido a esta situación, se plantea una relación del contexto de los estudiantes, sus calificaciones, con lo que se promueve su interés para resolverlo.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* El estudiante deberá a partir del problema planteado relacionarlo con el concepto se da posteriormente.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder afirmar que la relación de los estudiantes con sus calificaciones es una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

Situación 1.2: En un salón de clases existen las siguientes relaciones de noviazgos: Julio es novio de María; Jorge es novio de Fernanda; Pedro es novio de Claudia y de Teresa; Carlos es novio de Renata, pero también Luis es novio de Renata; Gustavo está soltero. Si relacionamos el primer conjunto A “todos los hombres del salón”, con el segundo conjunto B “todas las mujeres del salón” mediante la relación “es novio de” tenemos el siguiente diagrama:



¿Es una función? ¿Por qué?

Respuesta 1.2: Pedro está relacionado con dos mujeres y Gustavo no está relacionado con nadie, por lo tanto no es una función.

Nota al profesor: Se recuerda que el trabajo debe ser por equipos y NO dar la respuesta. Sólo se debe apoyar a los estudiantes si es que hacen preguntas. De esa manera se observará un avance, de otro modo el profesor simplifica el problema. Es muy frecuente que los estudiantes no consideren la palabra “cada” como todo y puedan tener dificultad para distinguir que Gustavo no está relacionado con nadie.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

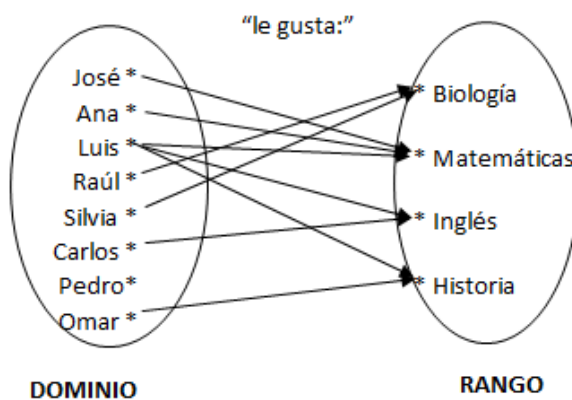
PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* La manera de darle sentido a esta primera situación, es hacerla de interés para el estudiante, con algo cotidiano y no abstracto, como es la relación de noviazgo, con el objetivo de motivar al estudiante para resolverlo.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Después de leer el concepto de función, el estudiante deberá razonarlo de manera abstracta y posteriormente compararlo con el problema del noviazgo.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder negar que la relación del noviazgo sea una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

Situación 1.3: A un grupo de estudiantes se les aplicó una encuesta donde les preguntaron qué asignaturas les gustaban de una lista de 4: Matemáticas, Biología, Inglés, Historia. Se obtuvieron los siguientes resultados: A José le gusta Matemáticas; a Ana, Matemáticas; a Luis, Inglés, Historia y Matemáticas; a Raúl, Biología; a Silvia, Biología; a Carlos, Inglés; a Pedro no le gusta ninguna; y a Omar, Historia. Realiza el diagrama que relaciona a los estudiantes (*dominio*), con las asignaturas (*rango*) ¿es o no es una función? ¿Por qué?

Respuesta 1.3: Pedro no está relacionado con ninguna asignatura y algunos estudiantes están relacionados con más de una asignatura. Por lo tanto, no es una función. Obteniendo un diagrama como el siguiente:



Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Se le da sentido a esta situación a través de un problema de relaciones dentro del contexto en el que están envueltos al ser estudiantes, las asignaturas de su preferencia, que promoverán el interés del estudiante para que lo resuelva.

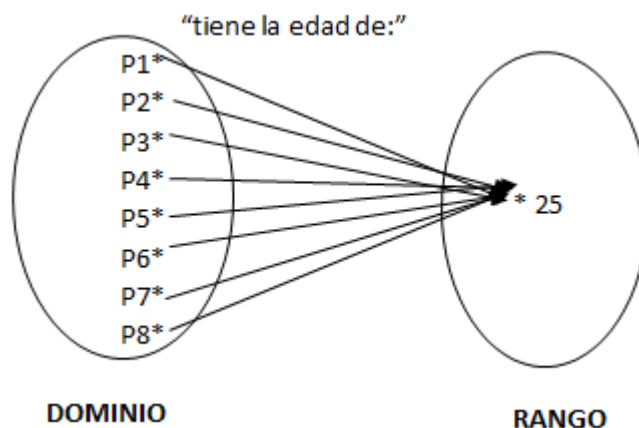
PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* El estudiante deberá volver a razonar el concepto de función de manera abstracta y posteriormente compararlo con el problema de la encuesta hecha acerca de las asignaturas que más les gustan a los estudiantes.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder negar que la relación de los estudiantes con las asignaturas que más les gustan sea una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* En esta situación no se les da el diagrama de relación, así que los estudiantes deberán modelar el problema mediante un diagrama de relación como se hizo en la situación 1.1.

Situación 1.4: En una fiesta se encontraban 8 personas, después de un rato de platicar, se dieron cuenta que las 8 tenían la misma edad, 25 años. Realizar un diagrama que relacione a cada persona de la fiesta (*dominio*), con la cantidad de años que tiene (*rango*), mediante la relación “tiene la edad de:”. ¿Es o no una función? ¿Por qué?

Respuesta 1.4: Se espera que los estudiantes realicen un diagrama como el siguiente:



Y que observen que todas las personas tienen asignada una y sólo una edad (aunque sea la misma para todos), por lo tanto sí es una función.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Esta situación está en el contexto de una fiesta entre jóvenes de la misma edad, con el objetivo de darle sentido al problema y que promueva el interés del estudiante para resolverlo.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* El estudiante seguirá en la práctica del razonamiento del concepto de función ahora con una situación en la que todo el dominio se asocia a un solo valor, los 25 años, y se ponga en duda al estudiante al responder si es o no una función.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder afirmar que la relación de los jóvenes en la fiesta con la edad que tienen es una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas*. En esta situación no se les da el diagrama de relación, así que los estudiantes deberán modelar el problema mediante un diagrama de relación como se hizo en las situaciones anteriores.

Situación 1.5: Si cambiamos los datos de la situación anterior: el Dominio ahora es la edad y el rango son las 8 personas. ¿Es o no una función? ¿Por qué?

Respuesta 1.5: La edad de 25 años estará relacionada con más de un elemento del rango, por lo tanto ya no es una función.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

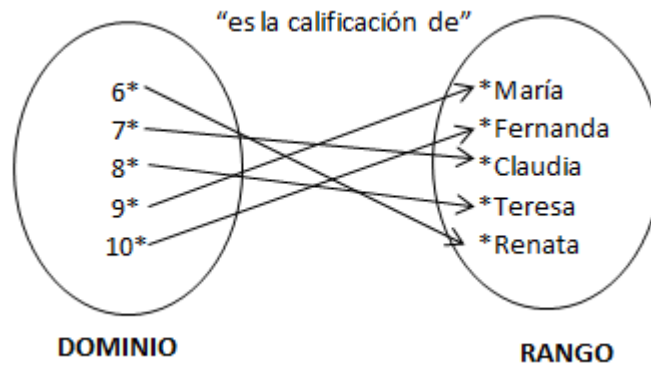
PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente*. El estudiante sigue en la práctica del razonamiento del concepto de función. Se cambió de posición el dominio y rango de la situación anterior, ahora no es una función.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros*. Para poder ahora negar que la relación de la edad con los jóvenes sea una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas*. El estudiante deberá modelar nuevamente la situación anterior pero cambiando de lugar el dominio con el rango en su diagrama de relación. Otra forma de hacerlo será cambiando sólo de dirección las flechas del rango al dominio.

Situación 1.6: Según las estadísticas de la Organización Internacional del Café (OIC), de octubre de 2010 a junio de 2011, los principales países exportadores de café en el mundo son: Brasil, que exporta principalmente a EEUU, Italia, Argentina y Uruguay; Vietnam, que exporta principalmente a Alemania y Estados Unidos; Colombia, que exporta principalmente a Estados Unidos, Japón, Alemania y Portugal; e India, que exporta principalmente a Italia, Alemania y Rusia. Realizar un diagrama que relacione como Dominio a los países exportadores de café y Rango a los países que lo importan. ¿Es o no una función? ¿Por qué?

Respuesta 1.6: Se espera que los estudiantes realicen un diagrama como el siguiente:



Y observen que cada calificación está relacionada con una y sola una estudiante, por lo tanto es una función.

Nota al profesor: Aprovechar esta situación para dar una intuición de función inversa. "Si al invertir el dominio y el rango como en esta situación, se cumple que la relación sigue siendo una función, entonces ésta es su función inversa".

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* El estudiante sigue en la práctica del razonamiento del concepto de función, se cambió de posición el dominio y rango de la situación anterior, sigue siendo una función pero ahora se aprovechará para introducir el concepto de función inversa.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder ahora negar que la relación de los estudiantes con sus calificaciones sea una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente los algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* El estudiante deberá modelar nuevamente la situación anterior pero cambiando de lugar el dominio con el rango en su diagrama de relación. Otra forma de hacerlo será cambiando sólo de dirección las flechas del rango al dominio.

PROBLEMAS PERSONALES

*Las Situaciones 1.1P a 1.6P están basados en problemas del libro **Implementing the Common Core State Standards through Mathematical Problem Solving de la NCTM***

Situación 1.1P: Si el *dominio* de una relación es escribir el nombre de una persona en el momento de su nacimiento en una base de datos y el *rango* son las huellas únicas de cada persona. ¿Es o no una función? ¿Por qué?

Situación 1.2P: Usted está planeando un viaje, la relación donde ingresa a su computadora una cantidad de dinero que puede gastar en pasajes de avión (*dominio*) y la computadora le da

muchos lugares diferentes a los que usted puede volar por esa cantidad de dinero (*rango*). ¿Es o no una función? ¿Por qué?

Situación 1.3P: Cuando se utiliza una máquina expendedora, la relación donde se presiona una letra (*dominio*) y su caramelo de elección es la salida (*rango*). ¿Es o no una función? ¿Por qué?

Situación 1.4P: Si ahora la máquina expendedora, sin importar la letra que presiones (*dominio*), la salida es una bolsa de papas fritas (*rango*). La relación de la letra con las papas fritas, ¿es o no una función? ¿Por qué?

Situación 1.5P: Cuando el Sr. González llama por su nombre a un estudiante (*dominio*), el alumno le da la media de los 10 números que obtuvo al lanzar diez veces un dado (*rango*). ¿La relación del estudiante con la media de los 10 números es o no una función? ¿Por qué?

Situación 1.6P: Tu amigo escribe un programa de computadora en el que se introduce un número positivo (x) (*dominio*) y la computadora escribe dos valores, los valores de \sqrt{x} y $-\sqrt{x}$ (*rango*). La relación de los de los números positivos (x) con los valores de \sqrt{x} y $-\sqrt{x}$ ¿es o no una función? ¿Por qué?

Situación 1.7P: Realiza un diagrama de relación de una situación de la vida real, en la que represente una función y otro en la que no.

SESIÓN 2: TABLAS DE RELACIONES

Estándares del CCSSM que se promueven:

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

Competencias específicas:

En esta sesión el estudiante:

- 1. Reconoce el dominio y rango de una tabla derivada de una situación contextualizada o no contextualizada*
- 2. Aplica el concepto de función para distinguir si una tabla de relaciones es una función o no.*
- 3. Dibuja diagramas de relación a partir de las tablas si lo necesita*

Situación 2.1: Una función es una relación en la que se asigna a cada uno de los elementos de una columna de la tabla perteneciente al dominio con exactamente un elemento de otra columna de la tabla perteneciente al rango.

Sabiendo la anterior definición de función, responde lo siguiente:

Juan quiere contratar un teléfono por plan, para lo que una compañía le ofrece lo siguiente:

Número de llamadas	Precio
50	\$300.00
100	\$300.00
200	\$300.00
300	\$300.00
400	\$300.00
500	\$400.00

La función que relaciona el número de llamadas con el precio por número de llamadas, ¿es una función? ¿Por qué?

Respuesta 2.1: Se espera que los estudiantes observen que a cada número de llamadas le corresponde sólo un precio, por lo tanto es una función.

Notas al profesor:

- 1.- El profesor debe dar tiempo a los estudiantes para reflexionar el concepto de función (mínimo 5 minutos). Y que observen que otra forma de ver las funciones es a través de una tabla.

2.- Se recuerda que el trabajo debe ser por equipos y NO dar la respuesta. Sólo se debe apoyar a los estudiantes si hacen preguntas porque de esa manera se observa un avance, de otro modo el profesor simplifica el problema.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Para darle sentido a esta primera situación, se busca el interés del estudiante mediante un problema de planes de celulares, problema contextualizado que intenta motivar al estudiante a resolverlo.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Después de leer el concepto de función representado en una tabla, el estudiante deberá razonarlo de manera abstracta y posteriormente compararlo con el problema del plan de celular. El profesor debe asegurarse que todos los estudiantes saben lo que es el dominio y el rango en una tabla.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder afirmar que la relación entre las llamadas de un plan de celular con el precio es una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

Situación 2.2: Un biólogo realiza un cultivo de bacterias. En la primera fase (adaptación) las bacterias se adaptan a las condiciones de crecimiento. En la fase de crecimiento, las bacterias comienzan la división celular y la población de bacterias crece. El biólogo fue registrando el número de bacterias acumuladas día con día como sigue:

Día	Número de bacterias
0	10
1	27
2	73
3	200
4	546

La tabla que relaciona los días transcurridos (*dominio*) con el número de bacterias (*rango*) existentes ¿es o no una función? ¿Por qué?

Respuesta 2.2: Se espera que los estudiantes observen que a cada día le corresponde sólo un número de bacterias, por lo tanto es una función.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Se busca el interés del estudiante a través de una situación real, la observación de un fenómeno, en el que se registran los datos a través del tiempo y se obtienen las tablas de relaciones, con el objetivo de motivar al estudiante a resolverlo.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Para seguir en práctica el razonamiento del concepto de función representado en una tabla, el estudiante deberá usar dicho concepto y aplicarlo al problema del cultivo de bacterias.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder afirmar que la relación de los días transcurridos con el número bacterias existentes es una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

Situación 2.3: Una esfera sólida de cobre se somete a un incremento homogéneo de temperatura en un lapso de tiempo determinado y ésta comienza a dilatarse como sigue:

Tiempo	Crecimiento de Diámetro
0 min	0 mm
1 min	1.00 mm
2 min	1.41 mm
3 min	1.73 mm
4 min	2.00 mm
5 min	2.23 mm

La tabla que relaciona el Tiempo transcurridos (*dominio*) con el crecimiento del diámetro de la esfera en ese tiempo (*rango*) ¿es o no una función? ¿Por qué?

Respuesta 2.3: Se espera que los estudiantes observen que a cada minuto le corresponde sólo un crecimiento de diámetro, por lo tanto es una función.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Se busca el interés del estudiante a través de una situación real, la observación de un fenómeno, en el que se registran los datos a través del tiempo y se obtienen las tablas de relaciones, con el objetivo de motivar al estudiante a resolverlo.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Para seguir en práctica el razonamiento del concepto de función representado en una tabla, el estudiante deberá usar dicho concepto y aplicarlo al problema del crecimiento del diámetro de una esfera.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder afirmar que la relación del tiempo transcurrido con el crecimiento del diámetro de la esfera es una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

Situación 2.4: Supóngase de la situación anterior, que el crecimiento del diámetro de la esfera representa el dominio y el tiempo transcurrido que le corresponde representa el rango. Realiza la tabla y determina si esta relación es una función. ¿Por qué?

Respuesta 2.4: A cada medida de crecimiento del diámetro le corresponde un solo tiempo, por lo tanto es una función.

Crecimiento de Diámetro	Tiempo
0 mm	0 min
1.00 mm	1 min
1.41 mm	2 min
1.73 mm	3 min
2.00 mm	4 min
2.23 mm	5 min

Nota al profesor: Aprovechar la situación para que el estudiante observe que se invirtió el dominio con el rango en la misma relación y sigue siendo una función, por lo tanto es su función inversa.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos. Se busca el interés del estudiante a través de una situación real, la observación de un fenómeno, en este caso se registra el tiempo al que se tuvo cierto crecimiento de diámetro y se obtienen las tablas de relaciones, con el objetivo de motivar al estudiante a resolverlo.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente. Para seguir en práctica el razonamiento del concepto de función representado en una tabla, el estudiante deberá usar dicho concepto y aplicarlo al problema del crecimiento del diámetro de una esfera. También seguirá construyendo una noción de función inversa.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros. Para poder afirmar que la relación del el crecimiento del diámetro de la esfera con tiempo transcurrido es una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

Situación 2.5: El puente Golden Gate en San Francisco California, fue diseñado por expertos ingenieros de manera que pueda atravesar el río suspendido por 2 torres. El puente esta sostenido por unas cuerdas en la parte superior que van variando en altura conforme se va alargando el puente. Se hizo un registro de la altura de las cuerdas y del largo del puente de una torre a otra como sigue:

Largo	Altura
0 metros	102 metros
2 metros	66 metros
4 metros	38 metros
6 metros	18 metros
8 metros	6 metros
10 metros	2 metros
12 metros	6 metros
14 metros	18 metros
16 metros	38 metros
18 metros	66 metros
20 metros	102 metros



La tabla que relaciona como *dominio* el largo del puente y como *rango* la altura de las cuerdas ¿es o no una función? ¿Por qué?

Respuesta 2.5: Se espera que los estudiantes observen que a cada longitud del puente le corresponde sólo una altura, por lo tanto es una función.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Se busca el interés del estudiante a través de una situación real, con un puente que es internacionalmente conocido y que de manera visual pueden ver la relación del largo del puente con la altura de las cuerdas que lo sostienen, con el objetivo de motivar al estudiante a resolverlo.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Para seguir en práctica el razonamiento del concepto de función representado en una tabla, el estudiante deberá usar dicho concepto y aplicarlo en la tabla que relaciona el largo del puente con la altura de las cuerdas que lo sostienen.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder afirmar que la relación del largo del puente con la altura de las cuerdas que lo sostienen es una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

Situación 2.6: Si cambiamos los datos de la situación anterior: Supóngase ahora que el *dominio* es la altura de las cuerdas y el *rango* es el largo del puente ¿Es o no una función? ¿Por qué?

Respuesta 2.6: A un mismo elemento del dominio le corresponden dos elementos del rango. Por lo tanto no es una función.

Nota al profesor: No necesariamente se debe poner el dominio como primera columna

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Para seguir en práctica el razonamiento del concepto de función representado en una tabla, el estudiante deberá ahora cambiar la estructura que tenía anteriormente (en la que del lado izquierdo de la tabla estaba el dominio y del derecho el rango).

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder ahora negar que la relación del largo del puente con la altura de las cuerdas que lo sostienen sea una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

Situación 2.7: Un grupo de estudiantes obtuvo las siguientes calificaciones:

Alumno	Calificación
María	8
Lourdes	10
Francisco	10
Juan	9
Claudia	7
Teresa	8
Renata	6
Luis	10
Fernando	6

La tabla que relaciona como *dominio* a las calificaciones obtenidas por los estudiantes y como *rango* a los estudiantes ¿es o no una función? ¿Por qué?

Respuesta 2.7: Se espera que los estudiantes observen que una misma calificación les corresponde a varios estudiantes, por lo tanto no es una función.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Para darle sentido a esta situación, se plantea una relación del contexto de los estudiantes, sus calificaciones, con lo que se promueve su interés para resolverlo.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Para seguir en práctica el razonamiento del concepto de función representado en una tabla, el estudiante deberá aceptar que no necesariamente se debe poner el dominio como primera columna.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder negar que la relación de las calificaciones con los alumnos sea una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

Situación 2.8: En una librería, la computadora registra la cantidad de libros vendidos en una semana y los ordena de la mayor a la menor con su día de venta correspondiente, como sigue:

Cantidad Vendida	Día
30	Miércoles
27	Sábado
27	Lunes
21	Viernes
15	Martes
13	Jueves

La tabla que relaciona la cantidad de libros vendidos (*dominio* también llamado *entradas*) con su día de venta (*rango* también llamado *salidas*), ¿es o no una función? ¿Por qué?

Respuesta 2.8: A la cantidad de 27 libros vendidos le corresponde dos días, por lo tanto no es una función.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* Se busca el interés del estudiante a través de una situación real, el registro de las ventas de una librería en una semana, con el objetivo de motivar al estudiante a resolverlo

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Para seguir en práctica el razonamiento del concepto de función representado en una tabla, el estudiante deberá usar dicho concepto y aplicarlo al problema del registro de las ventas de la librería.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder negar que la relación de la cantidad de libros vendidos con el día de venta sea una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PROBLEMAS PERSONALES

Situación 2.1P: Pedro quiere saber si el costo de viajar en taxi en la ciudad de Xalapa (dominio) se relaciona con la distancia recorrida (rango) para lo cual cuenta con los registros de la tabla siguiente:

Costo del transporte	Km recorridos
\$20.00	1
\$20.00	5
\$20.00	10
\$25.00	15
\$30.00	20
\$30.00	25
\$35.00	30

¿Es o no una función? ¿Por qué?



SESIÓN 3: PARES ORDENADOS

Estándares del CCSSM que se promueven:

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

PM.4 Modelar con las matemáticas

PM.7 Buscar y hacer uso de la estructura.

Competencias específicas:

En esta sesión el estudiante:

1. Comprende que existe un primer elemento del lado izquierdo y un segundo elemento del lado derecho en los pares ordenados y estos no se pueden mezclar.

2. Reconoce el dominio y rango en los pares ordenados derivados de situaciones contextualizadas o no.

3. Aplica el concepto de función para distinguir si un conjunto de pares ordenados son una función o no.

4. Dibuja diagramas de relación a partir de los pares ordenados si lo necesita

Situación 3.1: Se llama *par ordenado* a un conjunto formado por dos elementos matemáticos, un primer elemento a y un segundo elemento b que se denotan: (a, b)

En una base de datos hay diez personas enlistadas con el año en el que nacieron como sigue:

1.- 1989

2.- 1992

3.- 1976

4.- 1970

5.- 1955

6.- 1995

7.- 2000

8.- 1966

9.- 1982

10.-1958

Organiza la información en pares ordenados. Como primer elemento escribir el año de nacimiento y como segundo elemento la edad de cada uno al año 2014.

Respuesta 3.1: Se espera que los alumnos escriban los pares ordenados como sigue: $\{(1989, 25), (1992, 22), (1976, 38), (1970, 44), (1955, 59), (1995, 19), (2000, 14), (1966, 48), (1982, 32), (1958, 56)\}$.

Nota al profesor: El profesor debe dar tiempo a los estudiantes para reflexionar el concepto de par ordenado. Se recuerda que el trabajo debe ser por equipos y NO dar la respuesta. Sólo se debe apoyar a los estudiantes si hacen preguntas porque de esa manera se observa un avance, de otro modo el profesor simplifica el problema. Después del concepto de par ordenado, se debe puntualizar al estudiante que existe un primer elemento y un segundo elemento, es decir, que existe un orden estricto.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Después de leer el concepto de par ordenado, el estudiante deberá razonarlo de manera abstracta y posteriormente aplicarlo en la situación. Para escribir el segundo elemento del par ordenado, deberá calcular la edad que tiene la persona a partir del año de nacimiento dado.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder realizar los pares ordenados, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.7 *Buscar y hacer uso de la estructura.* Al puntualizar que existe un primer elemento y un segundo elemento, el estudiante deberá tener bien claro que existe un orden, con el objetivo de que en los ejercicios posteriores los estudiantes sigan haciendo uso de esta estructura

Situación 3.2: Una función es un conjunto de *pares ordenados* (x, y) en donde el primer elemento x pertenece al conjunto llamado Dominio y el segundo elemento y pertenece al Rango. Que satisfacen esta condición: No hay dos pares ordenados con el mismo primer elemento y diferente segundo elemento.

Sabiendo la anterior definición de función, ¿los siguientes conjuntos de pares ordenados representan una función? ¿Por qué? Realiza el diagrama de relaciones y la tabla para cada uno.

1.- $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7)\}$

2.- $\{(1, 3), (2, 6), (2, 7), (3, 4), (4, 9), (5, 78), (6, 14)\}$

3.- $\{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$

4.- $\{(0, 0), (4, 2), (4, -2), (9, 3), (9, -3), (16, 4), (16, -4)\}$

Respuesta 3.2: En los problemas 1 y 3 no existe la misma entrada para dos diferentes salidas, por lo tanto son funciones. Los problemas 2 y 4 sí tienen una misma entrada con 2 diferentes salidas, por lo tanto no son funciones.

Nota al profesor: El profesor debe dar tiempo a los estudiantes para reflexionar el concepto de función (mínimo 5 minutos) para que relacionen los diagramas y las tablas con los pares ordenados, y que observen que es otra forma de ver las funciones. El profesor debe asegurarse que todos los estudiantes saben lo que es una entrada y una salida en los pares ordenados para observar que a cada entrada le corresponde sólo una salida.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Después de leer el concepto de función representado en pares ordenados, el estudiante deberá razonarlo de manera abstracta y posteriormente aplicarlo a la situación, con la ayuda de las definiciones anteriores que ya saben aplicar (diagramas y tablas).

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder afirmar o negar que cada uno de los 4 conjuntos sean funciones, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

Situación 3.3: Existen conjuntos infinitos de pares ordenados, por lo que en Matemáticas hay una manera de abreviarlos, por ejemplo: $\{(x, y) \mid x = y\}$, que es igual a: $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots\}$

En los siguientes conjuntos de parejas ordenadas escriba 5 elementos que pertenezcan a dicho conjunto. Responda si es o no una función y justifique su respuesta.

1.- $\{(1, y) \mid y \text{ es entero}\}$

2.- $\{(x, y) \mid x - y = 0\}$

3.- $\{(x, y) \mid x * y = 1\}$

4.- $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2\}$

5.- $\{(x, y) \mid x + 2y = 3\}$

Respuesta 3.3: En los problemas 1, 2, 3 y 5 no existe una misma entrada para dos o más diferentes salidas, por lo tanto son funciones. Algunas posibles soluciones son: 1.- $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4),$

$(1, 5)$ }; 2.- $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$; 3.- $\{(1, 1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), (4, \frac{1}{4}), (5, \frac{1}{5})\}$; y 5.- $\{(0, \frac{1}{2}), (1, 1), (2, \frac{1}{2}), (3, 0), (4, -\frac{1}{2})\}$. El problema 4 sí tiene una misma entrada con diferentes salidas, por lo tanto no es función: 4.- $\{(-1, 1), (-1, -1), (1, -1), (1, 1), (\sqrt{2}, 0)\}$.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente. En primer lugar el estudiante deberá analizar cada conjunto para poder particularizar con ejemplos y mediante el razonamiento del concepto de función representado en pares ordenados, el estudiante aplique dicho concepto en cada conjunto de la situación.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros. Para poder afirmar o negar que cada uno de los conjuntos sean funciones, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 Modelar con las matemáticas. En esta situación no se les dan los pares ordenados particulares, sino de manera abstracta, así que los estudiantes deberán modelar el problema dando valores a cada conjunto que satisfagan la condición y posteriormente generalizar para cualquier valor.

Situación 3.4: Carlos y Martha se van a casar, será un evento familiar así que entre los dos planean tener un total de 100 invitados. El dominio son los invitados del novio y el rango los de la novia. Enumere varios pares de números que satisfacen este requisito. ¿Representan o no una función? ¿Por qué?

Respuesta 3.4: Independientemente de los pares encontrados es una función, ya que a cada primer elemento x le corresponde sólo un segundo elemento que es $100-x$.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos. La manera de darle sentido a esta situación, es hacerla de interés para el estudiante mediante la organización de una fiesta con un número límite de invitados, con el objetivo de motivar al estudiante a resolverlo.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente. Para seguir en practicando el concepto de función representado en pares ordenados, el estudiante deberá razonarlo de manera abstracta y posteriormente aplicarlo al problema de los invitados.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros. Para poder afirmar que la relación de los invitados del novio y la novia es una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas*. En esta situación no se les dan los pares ordenados, así que los estudiantes deberán modelar el problema dando valores a los invitados tal que la suma sea 100 exactamente.

Situación 3.5: Supóngase de la situación anterior, que ahora los invitados de la novia pertenecen al dominio y los del novio al rango. ¿Los pares ordenados de esta relación representan una función? ¿Por qué?

Respuesta 3.5: Es una función, ya que a cada primer elemento x (invitados de la novia) le corresponde sólo un segundo elemento que es $100-x$ (los invitados del novio), para que juntos sumen 100.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos*. La manera de darle sentido a esta situación, es hacerla de interés para el estudiante mediante la organización de una fiesta con un número límite de invitados, con el objetivo de motivar al estudiante a resolverlo.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente*. Para seguir en practicando el concepto de función representado en pares ordenados, el estudiante deberá razonarlo de manera abstracta y posteriormente aplicarlo al problema de los invitados.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros*. Para poder afirmar que la relación de los invitados de la novia y el novio es una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

SESIÓN 4: GRÁFICAS

Estándares del CCSSM que se promueven:

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

PM.4 Modelar con las matemáticas.

Competencias específicas:

En esta sesión el estudiante:

1. *Reconoce el dominio y rango de una gráfica derivada de una situación contextualizada o no.*
2. *Aplica el concepto de función para distinguir si una gráfica es una función o no.*
3. *Dibuja gráficas a partir de pares ordenados derivados de una situación contextualizada o no.*
4. *A partir de una gráfica determina el diagrama, la tabla y los pares ordenados asociados.*

Situación 4.1: Decimos que la gráfica y es una función de x , si cada valor de x en el eje de las abscisas (horizontal) tiene un único valor de y en el eje de las ordenadas (vertical) asociado. Decimos que y es el valor de la función o la variable dependiente, y x es el argumento o variable independiente.

Sabiendo la anterior definición de función:

a) Grafica los pares ordenados:

1.- $\{(x, y) \mid y = 2x\}$

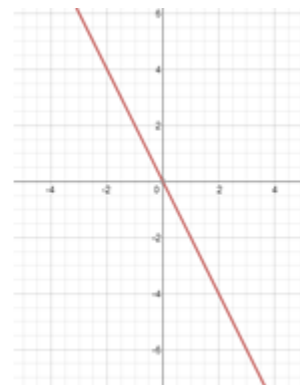
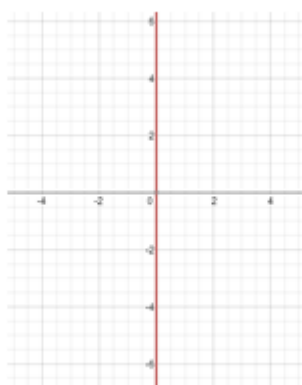
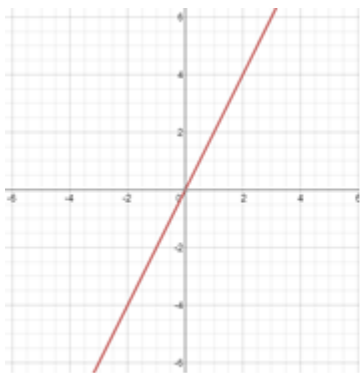
2.- $\{(0, y) \mid y \text{ es entero}\}$

3.- $\{(x, y) \mid 2x + y = 0\}$

b) ¿Las gráficas obtenidas son una función? ¿Por qué?

Respuesta 4.1:

a)



b) 1 y 3 son funciones, representan rectas en la que a cada entrada le corresponde sólo una salida. 2 no es función, es la recta $x=0$, al mismo dominio (el cero) le corresponden infinitas salidas.

Notas al profesor:

1.- El profesor debe dar tiempo a los estudiantes para reflexionar el concepto de función (mínimo 5 minutos) y lo relacionen con los pares ordenados. Además que observen que otra forma de ver las funciones es a través de gráficas.

2.- Se recuerda que el trabajo debe ser por equipos y NO dar la respuesta. Sólo se debe apoyar a los estudiantes si hacen preguntas porque de esa manera se observa un avance, de otro modo el profesor simplifica el problema.

3.- El profesor debe asegurarse que los estudiantes no olviden que en el eje de las abscisas (eje x , horizontal) se encuentra el dominio de la función y en el eje de las ordenadas (eje y , vertical) se encuentra el rango.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

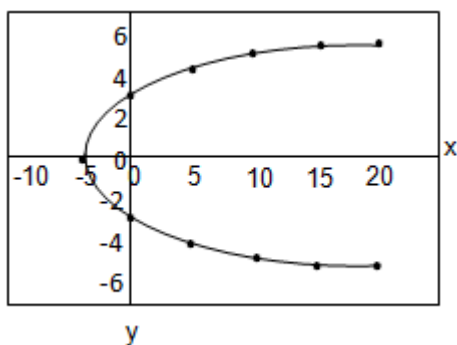
PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Después de leer el concepto de función representado en una gráfica, el estudiante deberá razonarlo de manera abstracta y posteriormente compararlo con la situación. Además podrán transitar en dos formas de representar las funciones (pares ordenados y en gráficas).

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder afirmar o negar que las gráficas resultantes de dibujar los pares ordenados sean funciones, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* Los estudiantes deberán modelar los pares ordenados en el plano cartesiano.

Situación 4.2:

- Identifica 6 pares ordenados (puntos) de la gráfica.
- ¿La gráfica representa una función? ¿Por qué?



Respuesta 4.2: a) Los puntos pueden ser: $\{(-5, 0), (0, 3), (0, -3), (5, 4.5), (5, -4.5), (10, 5), (10, -5), (15, 5.5), (15, -5.5), (20, 6), (20, -6), \text{etc.}\}$

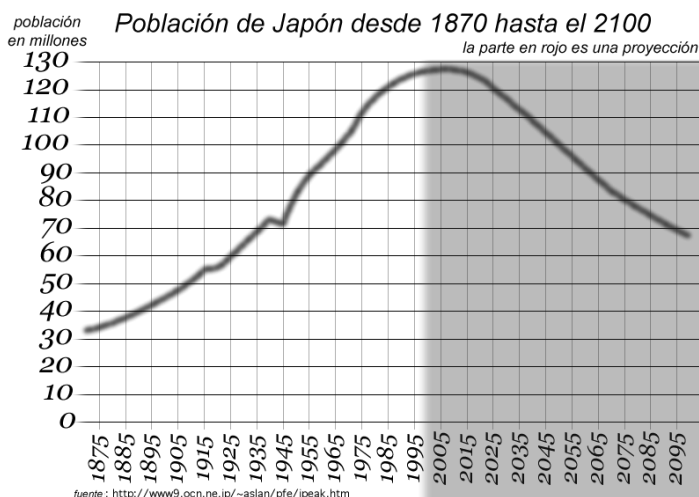
b) Se espera que los estudiantes observen que a diferentes puntos en el eje x le corresponde dos puntos en el eje y, por lo tanto no es una función.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Para seguir en practicando el concepto de función representado en gráficas, el estudiante deberá razonarlo de manera abstracta y posteriormente aplicarlo a la gráfica. Se apoyarán en lo aprendido en la sesión 3 (la representación en pares ordenados), y así conjuntar las dos formas de representación de funciones.

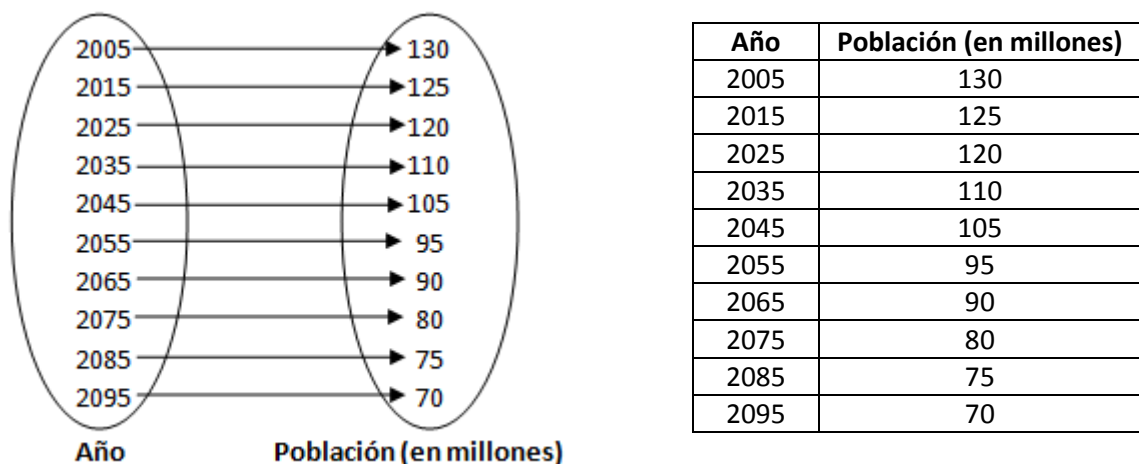
PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder negar que la gráfica sea función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

Situación 4.3: El gobierno de Japón publicó en sus estadísticas oficiales, la siguiente gráfica con la estimación de su población para el 2100:



- Realiza el diagrama, tabla y pares ordenados que relacionan el año con su población proyectada a partir del 2005.
- ¿En qué año crece más la población?
- ¿La gráfica representa una función? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el dominio y rango?

Respuesta 4.3: a) Una posible forma de elaborar el diagrama, tabla y pares ordenados es la siguiente:



{(2005, 130), (2015, 125), (2025, 120), (2035, 110), (2045, 105), (2055, 95), (2065, 90), (2075, 80), (2085, 75), (2095, 70)}

- El año en el que crece más la población es el 2005
- Sí es función debido a que a cada año le corresponde una y sólo una población
- El dominio de la gráfica contextualizada es (1875, 2095) y el rango (0, 130)

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

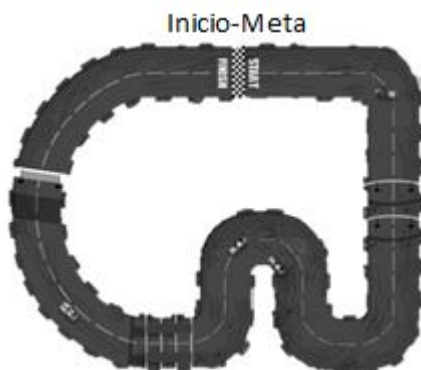
PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos. Se busca el interés del estudiante a través de una situación real, como es el crecimiento poblacional

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente. Para seguir en practicando el concepto de función representado en gráficas, el dominio y rango, el estudiante deberá razonarlo de manera abstracta y posteriormente aplicarlo a la gráfica. Se apoyarán en lo aprendido en las sesiones anteriores (la representación en diagrama, tabla y pares ordenados), y así usar diferentes representaciones del concepto de función. Además de introducirlo de manera intuitiva al concepto de máximo de una función.

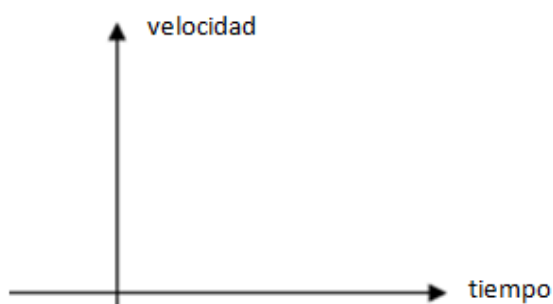
PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros. Para poder afirmar que la gráfica es función, elaborar las diferentes representaciones de función e identificar el dominio, rango y el punto máximo, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas*. Los estudiantes deberán modelar la función en un diagrama, tabla y pares ordenados, a partir de la gráfica dada.

Situación 4.4: Un corredor de autos realiza una carrera en la siguiente pista.



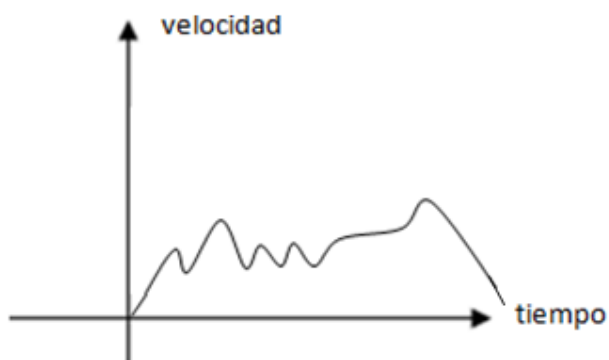
a) ¿Cómo crees que sería la posible gráfica de la velocidad a la que va el corredor de autos?



- b) ¿Qué representa la variable dependiente y la variable independiente?
c) ¿La gráfica representa o no una función? ¿Por qué?

Respuesta 4.4:

a) una posible gráfica es la siguiente:



b) La variable dependiente es la velocidad ya que depende de la variable independiente, que es el tiempo

c) Es una función ya que a cada tiempo le corresponde sólo una velocidad

Nota al profesor: El profesor debe apoyarlos a través de preguntas para que observe que independientemente de la gráfica realizada para la velocidad, a diferentes tiempos le corresponde una y sólo una velocidad, por lo tanto es una función.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

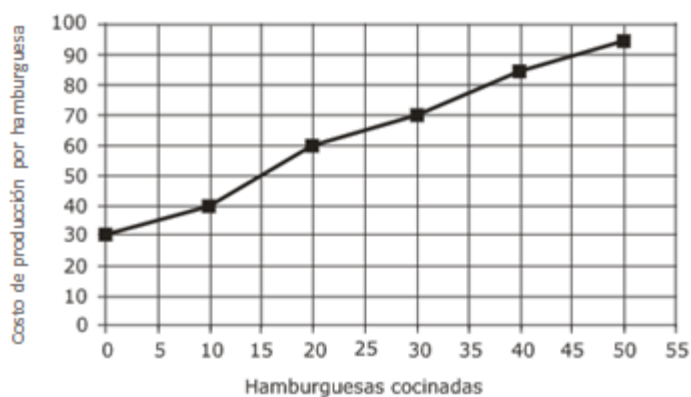
PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* La manera de darle sentido a esta situación, es hacerla de interés para el estudiante, con un problema de la vida cotidiana como es la carrera de autos y la velocidad a la que va.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Para seguir practicando el concepto de función representado en una gráfica, el estudiante deberá razonarlo de manera abstracta y posteriormente compararlo con la situación. Abstractar los conceptos de variable dependiente e independiente y ubicarlos en la gráfica. Además de analizar cómo debería ser la velocidad a la que va el corredor de carreras para poder realizar el circuito dado.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder realizar la gráfica, identificar cuál es la variable dependiente y la independiente, y afirmar que la gráfica que relaciona la velocidad con el tiempo es una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* Los estudiantes deberán modelar las diferentes velocidades a las que va el corredor de autos que realiza un recorrido en un circuito dado.

Situación 4.5: Dada la siguiente gráfica del costo de producción de hamburguesas.



- ¿La gráfica representa una función?
- ¿Qué representa la variable independiente x y la variable dependiente y ?
- ¿Cuál es el dominio?
- ¿Cuántas hamburguesas nos dan el mayor costo de producción por hamburguesa?
- Si suponemos que ahora las hamburguesas cocinadas dependen del costo de producción, realiza la nueva gráfica, ¿es función? (es llamada función inversa).

Respuesta 4.5:

- a) A cada hamburguesa cocinada le corresponde un único costo de producción, por lo tanto es función.
- b) La variable dependiente representa el costo de producción porque depende de la variable independiente que representa las hamburguesas cocinadas.
- c) El dominio son los números enteros de 0 al 50

Nota al profesor: Puede ser que algunos estudiantes contesten que son todos los números del 0 al 50 pero eso no es posible ya que en la vida real no se harán $\sqrt{2}$ hamburguesas. Se puede aprovechar para hablar de los números reales usando alguna de las siguientes ligas:

Ver: Números reales

<https://www.youtube.com/watch?v=IsoFP2YApvs>

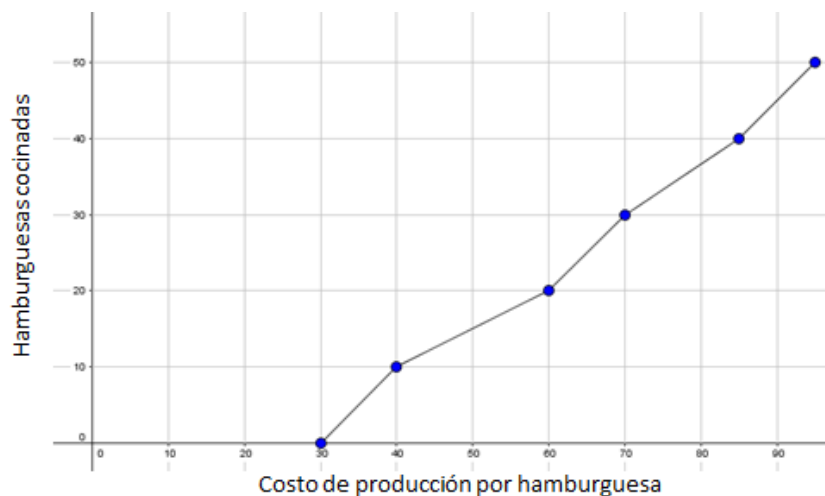
Ver: Dominio continuo y discreto

<https://www.youtube.com/watch?v=z7tGPe2Q2YE>

Ver: Tipos de intervalo

<https://www.youtube.com/watch?v=LnK47p17AtQ>

- d) 50 hamburguesas, ya que tiene un costo de 95 pesos por hamburguesa
- e) A cada costo de producción por hamburguesa (variable independiente x) le corresponde un único número de hamburguesas cocinadas (variable dependiente y), por lo tanto es función.



Nota al profesor: Aprovechar esta situación para hacer notar al estudiante que esta nueva gráfica representa la función inversa de la original.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Para seguir practicando el concepto de función representado en una gráfica, el estudiante deberá razonarlo de manera abstracta y

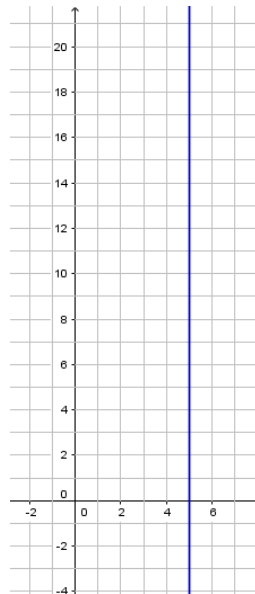
posteriormente compararlo con la situación. Abstract los conceptos de variable dependiente e independiente y ubicarlos en la gráfica. Además de que se le está introduciendo a la denominación de $f(x)$ lo que hasta el momento conocían como y , y con esto dar la pauta para la ver las funciones con un enfoque de relaciones algebraicas

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder realizar la gráfica, identificar cuál es la variable dependiente y la independiente, y afirmar que la gráfica que relaciona la velocidad con el tiempo es una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

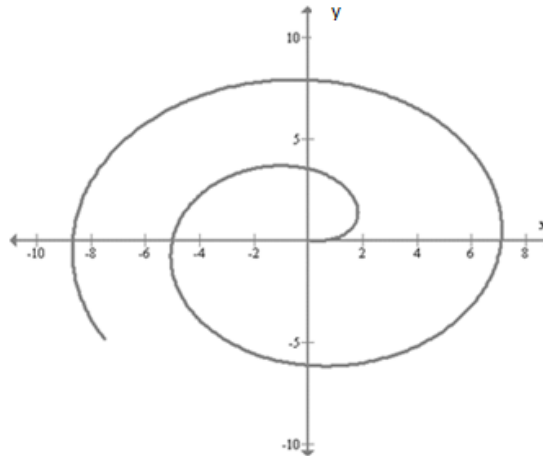
PM.4 *Modelar con las matemáticas.* Los estudiantes deberán modelar la nueva gráfica que representa el costo de producción por hamburguesa de acuerdo al número de hamburguesas cocinadas.

PROBLEMAS PERSONALES

Situación 4.1P: ¿La siguiente gráfica representa una función? ¿Por qué?

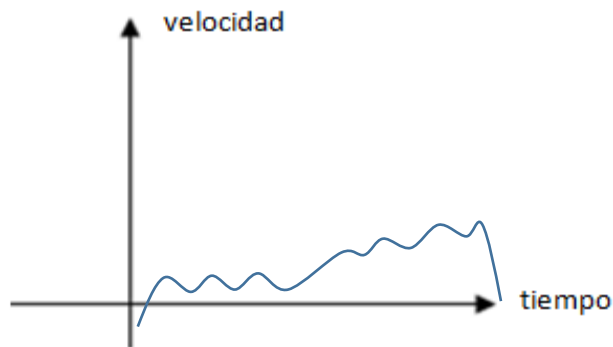


Situación 4.2P: La siguiente gráfica es conocida como el espiral de Fermat. ¿Representa una función? ¿Por qué?



Situación 4.3P¹: Las perspectivas del Banco Nacional de México indican que la economía, en 2013, tuvo el siguiente comportamiento: un inicio promisorio (que va en aumento); luego entre abril y septiembre la situación se descompuso y, finalmente, en el último trimestre, la situación mejoró sustancialmente. Dibuja una posible gráfica del comportamiento de la economía en el año 2013.

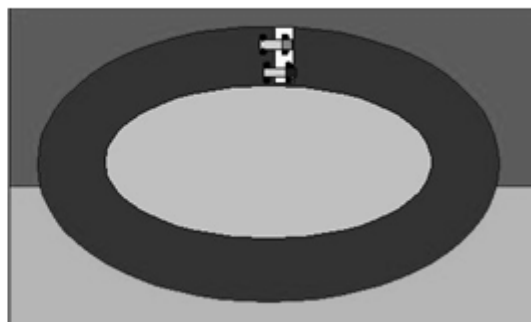
Situación 4.4P: Si un automóvil registró la siguiente gráfica de velocidades, ¿cuál de las siguientes pistas recorrió?



a)

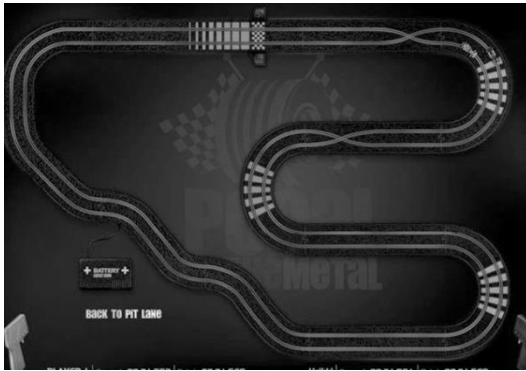


b)



¹ Basada en el libro **Calculo Diferencial** del Tecnológico de Monterrey p. 27

c)



SESIÓN 5: RELACIÓN ALGEBRAICA (ECUACIÓN)

Estándares del CCSSM que se promueven:

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

PM.4 Modelar con las matemáticas.

PM.6 Asista a la precisión.

Competencias específicas:

En esta sesión el estudiante:

- 1. Reconoce una variable dependiente de una independiente en situaciones contextualizadas o no contextualizadas*
- 2. Escribe la variable dependiente en términos de la independiente*
- 3. Dibuja pares ordenados y gráficas a partir de una relación algebraica*
- 4. Reconoce el dominio y rango de una relación algebraica en situaciones contextualizadas o no*
- 5. Aplica el concepto de función para distinguir si una relación algebraica es una función o no.*

Situación 5.1: En una relación algebraica (ecuación), si la variable dependiente y se puede dejar expresada en términos de la variable independiente x , se podrá escribir $y = f(x)$

Sabiendo lo anterior, despeja las siguientes relaciones algebraicas dejando a y en términos de x , t o la variable que corresponda y posteriormente sustituyendo a y por $f(x)$, $f(t)$ o según corresponda.

a) $5x - y = 0$

b) $2x - y + 3 = 0$

c) $-y_0 - V_{0y}t = -y + \frac{1}{2}at^2$

d) $V_y^2 = V_{0y}^2 + 2a(y - y_0)$

Respuesta 5.1:

a) $f(x) = 5x$

b) $f(x) = 2x + 3$

c) $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + y_0 + V_{0y}t$

$$d) f(V_y) = \frac{V_y^2 - V_{0y}^2}{2a} + y_0$$

Nota al profesor: Se recuerda que el trabajo debe ser por equipos y NO dar la respuesta. Sólo se debe apoyar a los estudiantes si hacen preguntas porque de esa manera se observa un avance, de otro modo el profesor simplifica el problema.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* El estudiante deberá razonar de manera abstracta que la variable dependiente puede ser expresada en términos de la variable independiente y posteriormente aplicarlo en los incisos de la situación. Ya que es probable que los estudiantes no relacionen a la variable dependiente y como $f(x)$.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder expresar la variable dependiente en términos de la independiente, el estudiante deberá construir argumentos viables. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.6 *Asista a la precisión.* El estudiante debe ser preciso en la modificación de la ecuación a la función, ya que en caso contrario no expresarían la misma relación algebraica.

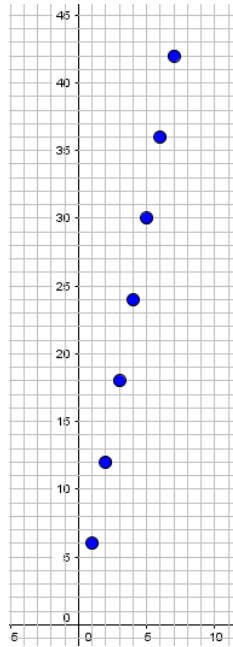
Situación 5.2²: Una manzana cuesta 6 pesos.

- ¿Cuánto cuestan cinco manzanas? ¿Diez manzanas?
- ¿Cómo podemos representar el costo total de x cantidad de manzanas?
- "El costo total de cinco manzanas es de 30 pesos". Si quisiéramos abreviar esta frase, se podría escribir $f(5) = 30$. ¿Qué crees que significa $f(5)$ en palabras?
- Hemos leído la expresión $f(x)$ como " f de x ." ¿Cómo leer $f(15)$? ¿Qué significa $f(15)$? ¿Cuál es su valor?
- Grafica puntos de la forma $(x, f(x))$ para diferentes valores de x . ¿La gráfica representa una función?

Respuesta 5.2:

- cinco manzanas cuestan 30 pesos, diez manzanas cuestan 60 pesos
- $6x$
- El costo de 5 manzanas
- El costo de quince manzanas
- $(1, 6), (2, 12), (3, 18), (4, 24), \dots$

² Basadas en el libro **Implementing the Common Core State Standards through Mathematical Problem Solving** de la NCTM p.21



Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.1 *Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.* La manera de darle sentido a esta situación, es hacerla de interés para el estudiante, con un problema de la vida cotidiana, comprar unas manzanas.

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* El estudiante seguirá razonando de manera abstracta el uso de la variable dependiente como $f(x)$ “ f de x ” y posteriormente aplicarlo en la situación del costo de las manzanas.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder expresar la variable dependiente en términos de la independiente, el estudiante deberá construir argumentos viables. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.4 *Modelar con las matemáticas.* El estudiante modelará el costo de las manzanas a través de una gráfica y tendrá una noción de lo que es evaluar un punto en una función (en la representación de relación algebraica).

Situación 5.3: Una función $f(x)$ es una regla que asigna a cada elemento x del Dominio, con exactamente un elemento del Rango denotado por $f(x)$

Sabiendo la anterior definición de función, responde lo siguiente:

¿Las relaciones algebraicas de la situación 5.1, donde se despejó a y en términos de x , representan funciones?

Respuesta 5.3: Todos los incisos son funciones porque a cada elemento del dominio se le asigna uno y sólo uno del rango.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Después de leer el concepto de función representado como relación algebraica, el estudiante deberá razonarlo de manera abstracta y posteriormente compararlo con la situación

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder decidir cuál expresión algebraica es una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

Situación 5.4: Despeja ahora a x en términos de y y posteriormente sustituye a x por $g(y)$, ¿estas relaciones algebraicas representan funciones, es decir las funciones $f(x)$ tienen función inversa $g(y)$?

Respuesta 5.4:

a) $x = g(y) = \frac{y}{5}$, si es función, a cada elemento y le corresponde un solo elemento $g(y)$, es la función inversa.

b) $x = g(y) = \frac{y-3}{2}$, si es función, a cada elemento y le corresponde un solo elemento $g(y)$, es la función inversa.

c) $x = g(y) = 2 - y$, si es función, a cada elemento y le corresponde un solo elemento $g(y)$, es la función inversa.

d) $x = \pm\sqrt{y+8}$, no es función, a cada elemento de y le corresponden 2 elementos $g(y)$, uno positivo y otro negativo, no tiene función inversa.

Nota al profesor: El estudiante debe observar en el inciso d) que es la raíz positiva y la negativa por lo tanto no es función, así $f(x) = x^2 - 8$ no tiene función inversa.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* El estudiante deberá razonar de manera abstracta que la variable dependiente puede ser expresada en términos de la variable independiente y hacer el despeje. Posteriormente deberá razonar el concepto de función y aplicarlo en cada inciso.

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder expresar la variable dependiente en términos de la independiente y determinar si representan funciones, el estudiante deberá construir argumentos viables. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PM.6 *Asista a la precisión.* El estudiante debe ser preciso en la modificación de la ecuación a la función, ya que en caso contrario no expresarían la misma relación algebraica.

Situación 5.5: ¿Las siguientes relaciones algebraicas son funciones? ¿Por qué?

1.- $f(x) = 2x + 1$

$$2.- g(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \geq 0 \\ -x & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$$

$$3.- h(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \geq 1 \\ 0 & \text{para } x \leq 1 \end{cases}$$

$$4.- C(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \\ 1 & \text{para } 0 < x < 10 \\ 2 & \text{para } x \geq 10 \end{cases}$$

5.- $r(x) = \sqrt{x}$

Respuesta 5.5:

1.- Es función porque a cada elemento del dominio se le asigna uno y sólo uno del rango.

2.- Parecería haber problemas con $x = 0$ pero el valor asignado para ambas relaciones es $g(0) = 0$.

3.- Al valor del dominio $x = 1$ se le asignan 2 valores del rango, $h(1) = 1$ y $h(1) = 0$, por lo tanto no es función.

4.- Si es función.

5.- Se puede observar que no tiene restricción en el dominio, así que para valores negativos no se está asociando ningún valor del rango y no es función. En el desarrollo de este ejercicio puede surgir la duda cuando x toma valores positivos, ya que la raíz tiene un resultado positivo y otro negativo, así que se deberá especificar cómo se está usando para resolverlo.

Nota al profesor: El profesor debe dar tiempo a los estudiantes para reflexionar el concepto de función (mínimo 5 minutos). Concluir que otra forma de ver las funciones es a través de una relación algebraica. Y que observen que las cinco definiciones son equivalentes y que puede haber más, ya que el concepto de función es amplio y flexible. El profesor debe asegurarse que los estudiantes no confundan la variable independiente x con el valor de la función $f(x)$ (variable dependiente). Además de que asocien siempre $y = f(x)$ cuando y es nombrada como la variable dependiente.

Estándares para la práctica Matemática de la CCSSM

PM.2 *Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.* Después de leer el concepto de función representado como relación algebraica, el estudiante deberá razonarlo de manera abstracta y posteriormente compararlo con la situación

PM.3 *Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.* Para poder decidir cuál expresión algebraica es una función, el estudiante deberá construir argumentos viables a partir del concepto de función. Posteriormente algunos estudiantes pasarán al pizarrón a exponer sus resultados y deberán criticar el razonamiento de otros defendiendo sus argumentos.

PROBLEMAS PERSONALES

Situación 5.1P: Una empresa que fabrica computadoras tiene gastos fijos por \$100 diariamente y un costo de producción de \$7,000.00 por computadora. La empresa las saca al mercado con un precio de venta de \$10,000.00 por computadora.

a) ¿Cuál es la utilidad semanal de la empresa? Encuentra esta relación algebraica (toma en cuenta que en la utilidad influyen: el costo fijo diario que tiene la empresa, las computadoras vendidas y el costo de producción por computadora)

b) ¿Es o no una función? ¿Por qué?

Situación 5.2P: El plan de teléfono celular de Claudia tiene un costo de \$ 100 por mes, más cincuenta centavos por minuto. Su amiga Lupita está en otra compañía que le ofrece un plan con un costo de un peso con cincuenta centavos por minuto. Claudia no sabe si seguir con su compañía o cambiarse a la de Lupita.

a) ¿Cuál es tu consejo? Toma en cuenta que existe una relación entre los minutos de llamada y el precio por minuto para cada plan. Realiza las gráficas o tablas que creas correspondientes

b) ¿Ambas representan una función o no? ¿Por qué?