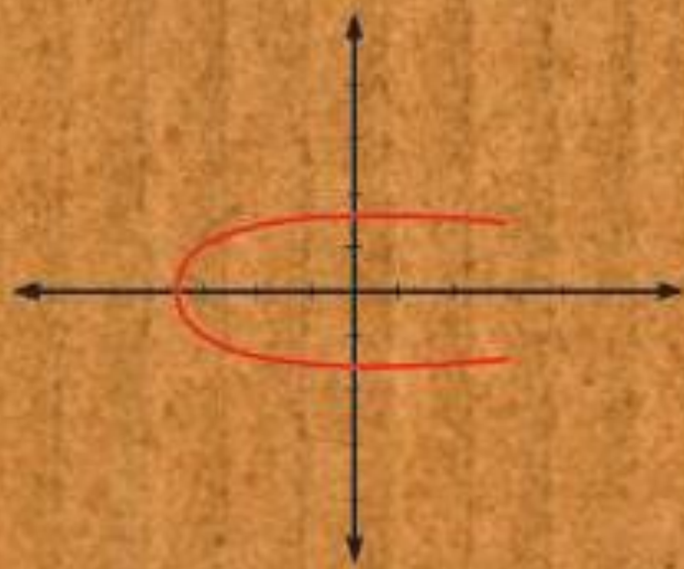
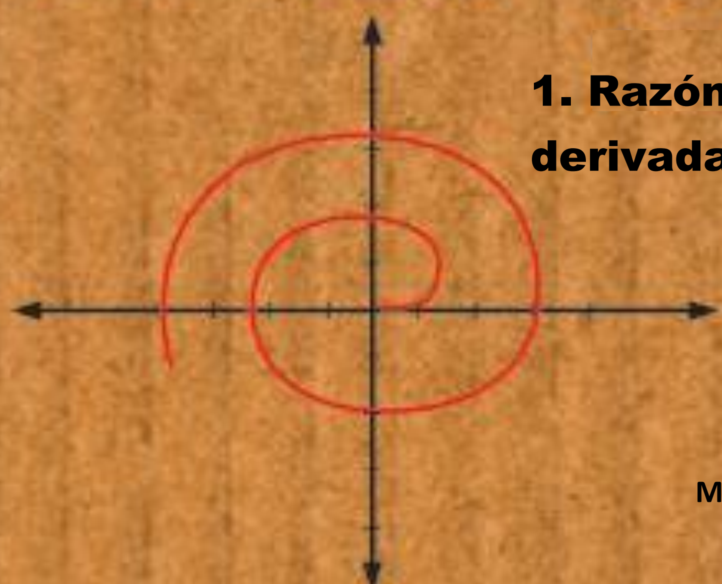


Cálculo



1. Razón de cambio a derivada

Mtra. Zenaida Avila Aguilar

Universidad
Veracruzana

RECOMENDACIONES GENERALES PARA EL PROFESOR

Pondrá énfasis en el trabajo que los alumnos desarrollarán en el aula. Esto supone aclarar a los estudiantes que deberán realizar, como trabajo extra escolar de cada a sesión, las actividades que se describen a continuación:

Resolver un problema que no haya sido resuelto en el aula a lo largo de las sesiones. El problema puede ser elegido de la lista de problemas a ser resueltos como trabajo individual que aparece al final de la sesión.

Construir y resolver un problema que requiera la aplicación de los conceptos dados en la sesión y que esté relacionado con su área de estudio de interés.

Describir el proceso que han seguido para verificar el resultado del problema que haya resuelto. Consideramos necesario que el profesor o el monitor programe, en cada sesión, las siguientes actividades:

Intervención del profesor, exposición de los estudiantes, trabajo en equipo, trabajo individual y discusión.

A continuación, describimos brevemente cada una de las actividades que mencionamos en el párrafo anterior. Cabe mencionar que el orden en que las presentamos, no guarda relación con su importancia.

La descripción de las mencionadas actividades no supone que deban realizarse exhaustivamente en una clase de 50 minutos.

Intervención del profesor

Las intervenciones del profesor, al introducir un tema, han de ser cortas. En todo caso, han de producirse con la finalidad de orientar a los estudiantes en aspectos concretos como:

a) Establecer los objetivos particulares.

b) Describir la forma de organizar el trabajo de los equipos y en el aula.

c) Explicar procedimientos, hechos o heurísticas que permitan a los estudiantes avanzar en la resolución de un problema.

Exposiciones de los estudiantes

Las intervenciones de los estudiantes pueden ser de manera individual o por equipos para:

a) Presentar sus argumentos.

b) Dirimir ideas que puedan parecer contrarias entre uno o más miembros del equipo.

c) Presentar el proceso de resolución de un problema.

d) Presentar el proceso de resolución de algún problema dado como trabajo extra escolar;

e) Presentar trabajos o tareas a desarrollar fuera del aula.

Trabajo en equipo

Los equipos podrán integrarse con dos o tres estudiantes. El trabajo en equipo tiene como propósito proporcionar a los estudiantes un contexto más o menos estable y continuo para enfrentar colectivamente la resolución de problemas. Se sugiere dedicar a esta actividad el tiempo suficiente en cada sesión para resolver los problemas planteados.

Trabajo individual

El trabajo individual tiene como propósito evaluar el trabajo de cada estudiante fuera de la sesión. La frecuencia y grado de participación puede obtenerse a partir de la participación individual en el aula o, bien, a partir de los reportes escritos que formen parte del portafolio de trabajo de cada estudiante.

Discusión general

Esta actividad ha de permitir a los estudiantes escuchar y valorar las preguntas y comentarios de sus compañeros; corregir errores cometidos en el proceso de resolución de un problema o aprender a sustentar sus ideas.

El trabajo cotidiano consiste, fundamentalmente, en la resolución de problemas de diferentes grados de dificultad. Así, la colección de problemas que proponemos puede facilitar el propósito del profesor

ESTÁNDARES PARA LA PRÁCTICA MATEMÁTICA DEL COMMON CORE STATE STANDARDS FOR MATHEMATICS (CCSSM)

Para saber cuáles son los aprendizajes que se promueven en cada situación didáctica, nos basaremos en los ocho Estándares para la Práctica Matemática de las Funciones establecidas en el Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM) para el nivel universitario. Estos estándares pueden ser considerados como elementos fundamentales de la resolución de problemas matemáticos:

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

PM.4 Modelar con las matemáticas.

PM.5 Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.

PM.6 Asista a la precisión.

PM.7 Buscar y hacer uso de la estructura.

PM.8 Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido. (CCSSI 2010)

ÍNDICE

UNIDAD 6: RAZÓN DE CAMBIO A DERIVADA

UNIDAD 6: RAZÓN DE CAMBIO A DERIVADA

SESIÓN 1: NECESIDAD DE LA RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA

Competencias generales del CCSSM que se promueven:

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

PM.4 Modelar con las matemáticas.

PM.5 Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.

PM.6 Asista a la precisión.

PM.7 Buscar y hacer uso de la estructura.

PM.8 Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido. (CCSSI 2010)

Competencias específicas:

En esta sesión el estudiante:

1. Por medio de la razones de cambio promedio, comprende el significado de la razón de cambio instantánea que es el concepto de la derivada en un punto

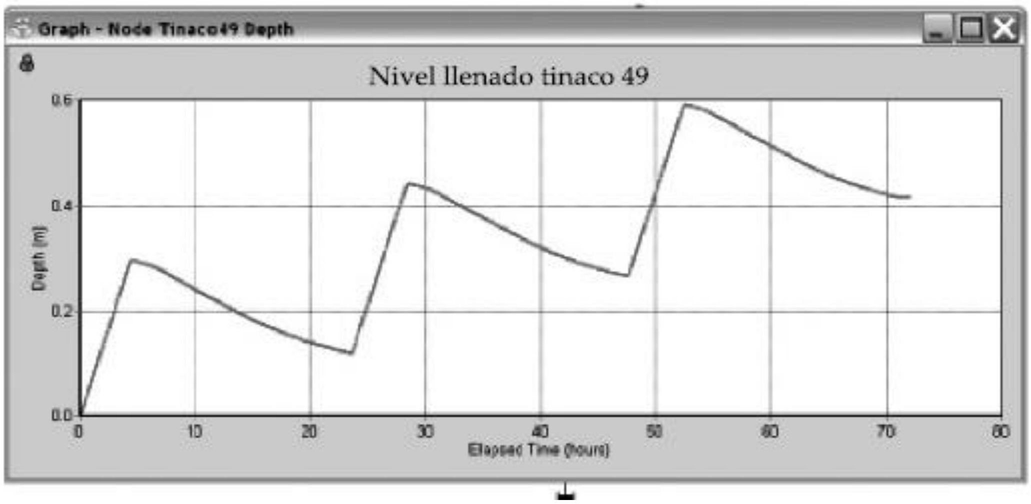
2. Encuentra la necesidad de una razón de cambio instantánea

3. Por medio de razones de cambio promedio, observa la tendencia de los valores para comprender el concepto de derivada en un punto.

4. Identifica y distingue la razón de cambio promedio de la instantánea gráficamente

5. Identifica la gráfica de una función derivada

Situación 1.1 En la gráfica se muestra el modelo de la evolución de nivel de agua (metros) de un tinaco de una casa habitación en un transcurso de 72 horas.



Fuente: Artículo ***Modelación de redes de distribución de agua con suministro intermitente***.
http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S2007-24222012000200001&script=sci_arttext

a) Con base en la gráfica ¿qué puede conjeturar acerca del llenado de agua del tinaco?
b) ¿Cuál es la razón de cambio promedio (variación) por hora del nivel del tinaco en un periodo de 0 a 40 horas? ¿Qué interpretación le das?
c) ¿La razón de cambio promedio (variación) por hora describe el comportamiento de la gráfica?

Respuesta 1.1

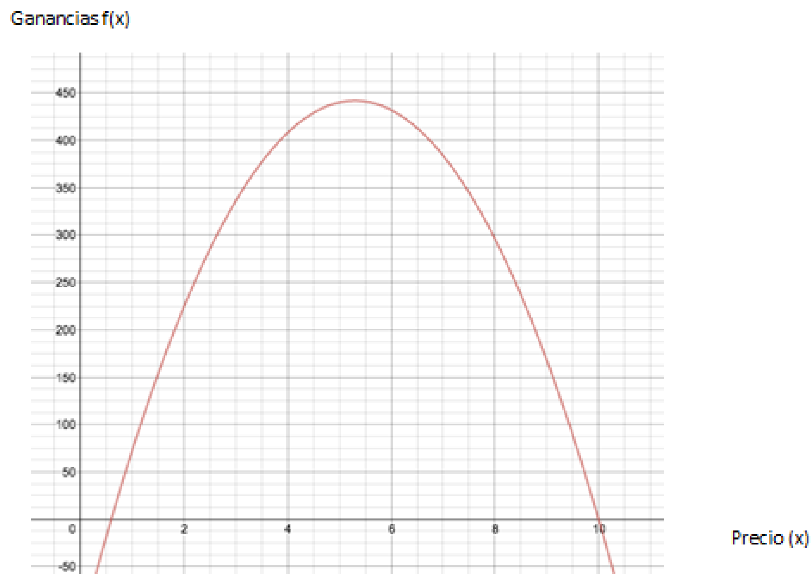
a) Se puede conjeturar que se estuvo haciendo uso del tinaco, fugas de agua, etc.

b) De manera aproximada $\frac{0.35}{40}$ metros por hora, es decir por hora en promedio se llenó $\frac{0.35}{40} = 0.00875$ metros o 0.875 cm por hora

Nota para el profesor: el valor tomado del eje de las y puede variar de acuerdo a la aproximación visual del estudiante.

c) No, porque habrá periodos en los que no aumenta eso, aumenta más o disminuye

Situación 1.2 La siguiente gráfica muestra las ganancias de la venta de un artículo que tiene variaciones de su precio en un mes, suponiendo que lo tiene en stock por lo que su costo de producción es el mismo.



a) ¿Qué interpretación le das a la gráfica?
b) ¿Cómo es la variación (razón de cambio) promedio de las ganancias entre cualquier par de precios hasta los $5.00?
c) ¿Cómo es la variación (razón de cambio) promedio de las ganancias entre cualquier par de precios de los $6.00 a los $10.00?
d) ¿Cómo crees que debe ser la variación (razón de cambio) promedio de las ganancias cuando se tiene el precio en el que las ganancias son máximas?

Respuesta 1.2

a) *C*onforme el precio de venta aumenta también aumentan las ganancias, pero llega un momento que después de cierto precio las ganancias disminuyen

b) Positiva, creciente

Nota al profesor: Apoyar al estudiante trazando la recta con la inclinación que representa el valor de la pendiente o razón de cambio, así será más fácil responder el inciso d)

c) Negativa, decreciente

d) Cero, cuando las ganancias dejan de crecer y empiezan a decrecer.

Situación 1.3 La siguiente tabla representa el precio del dólar el 16 de febrero de cada año en el periodo 2009 al 2015

Año	Precio del dólar
2009	14.4326
2010	12.9420

2011	12.1140
2012	12.7658
2013	12.6982
2014	13.3320
2015	14.8605

Fuente: www.sat.gob.mx

a) Determina la variación (razón de cambio) anual del dólar y regístralo en una tabla.
b) ¿Cuál es la variación anual del dólar del día 16 de febrero del 2011?
c) Cuál es la variación mensual de esa fecha si se sabe que el precio del dólar fue:

Fecha	Precio del dólar
16 de enero	12.1028
16 de febrero	12.1140
16 de marzo	12.0171

Fuente: www.sat.gob.mx

d) Cuál es la variación del día 16 de febrero de 2011 si se sabe que el precio del dólar fue:

Fecha	Precio del dólar
15 de febrero	12.0461
16 de febrero	12.1140
17 de febrero	12.0957

Fuente: www.sat.gob.mx

Respuesta 1.3

a)

Años	Razón de cambio
(1) Del 09 al 10	-1.4906
(2) 10 al 11	-0.828
(3) 11 al 12	0.6518
(4) 12 al 13	-0.0676
(5) 13 al 14	0.6338
(6) 14 al 15	1.5285

b) Para obtener la variación promedio anual del 2011 se requieren 2 puntos, así que se toma el valor del dólar en el 2010 (nos acercamos por la izquierda) y la variación (2010 al 2011) es -0.82. Ahora tomamos el valor del dólar en el 2012 (nos acercamos por la derecha) que tuvo una variación (2011 al 2012) de 0.6518

-0.828<V. anual (16 de febrero del 2011) <0.6518

Nota al profesor: Aclare al estudiante que esta variación no es muy precisa, debido a que no sabe que pasa en los puntos intermedios.

c) La variación de enero a febrero fue 0.0112 y la variación de febrero a marzo fue -0.0969

0.0112 >V. mensual (16 de febrero del 2011)>-0.0969

Nota al profesor: Aclare al estudiante que esta variación no es muy precisa, debido a que no sabe que pasa en los puntos intermedios.

d) La variación del 15 al 16 fue 0.0679 y la variación del 16 al 17 fue -0.0183

0.0679 >V. diaria (16 de febrero del 2011)> -0.0183

Nota al profesor: Debe dejar claro a los estudiantes que se empieza con una variación anual, luego mensual y luego diaria, acercándose a una variación instantánea que es más precisa. Se puede realizar una gráfica para apoyarse.

Situación 1.4 Un auto recorre las siguientes distancias en los tiempos que se señalan en la tabla:

Ciudad	Tiempo desde el punto inicial	Distancia del punto inicial
Inicio	0 horas	0 km
A	1 hora	50 km
B	1.5 horas	100 km
C	1.8846 horas	150 km

a) Realiza la gráfica de la distancia que recorre el auto de acuerdo al tiempo que tarda.
b) ¿Cuál es la distancia que existe entre el inicio y la ciudad A, entre la ciudad A y B, y entre la ciudad B y C? ¿Qué tiempo tardo en hacer esos recorridos? ¿Qué quiere decir?
c) ¿Cuál es la velocidad promedio (también es una razón de cambio promedio) que llevaba el auto en todo el recorrido (del inicio a la ciudad C)? ¿Qué significa en la gráfica esta velocidad promedio?
d) ¿La velocidad obtenida describe la velocidad a la que iba el auto en cualquier punto de su recorrido?
e) Si obtenemos la velocidad promedio que llevaba el auto de una ciudad a otra ¿sí describe la velocidad a la que transitó el auto en cualquier punto? ¿Qué representan estas velocidades en la gráfica?
f) ¿Puedo obtener la velocidad a la que paso el auto en el punto de la ciudad A (velocidad instantánea)? ¿qué necesito?
g) Si se sabe el tiempo al que pasó el auto en las siguientes distancias:

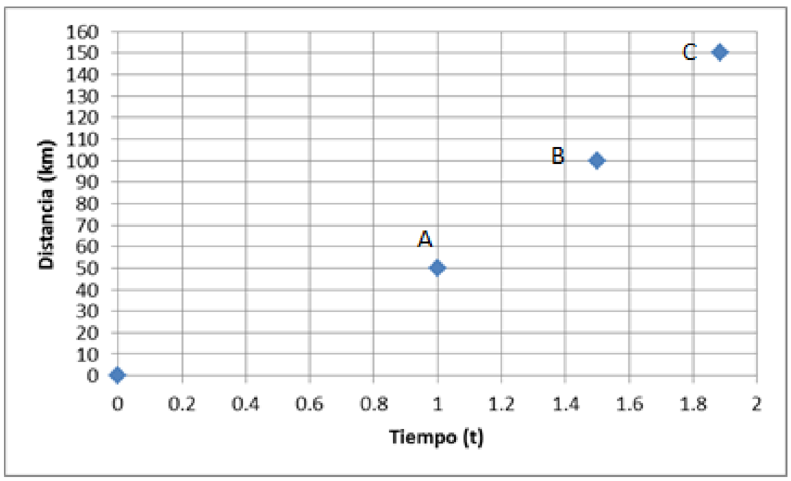
Distancia	Tiempo
47.5248117	0.97
48.343170960	0.98
49.168233740	0.99
49.583278935	0.995

49.749766257	0.997
49.916521717	0.999
49.958252479	0.9995
49.991649155	0.9999
49.999164885	0.99999
49.999916488	0.999999
49.999991649	0.9999999
49.999999165	0.99999999

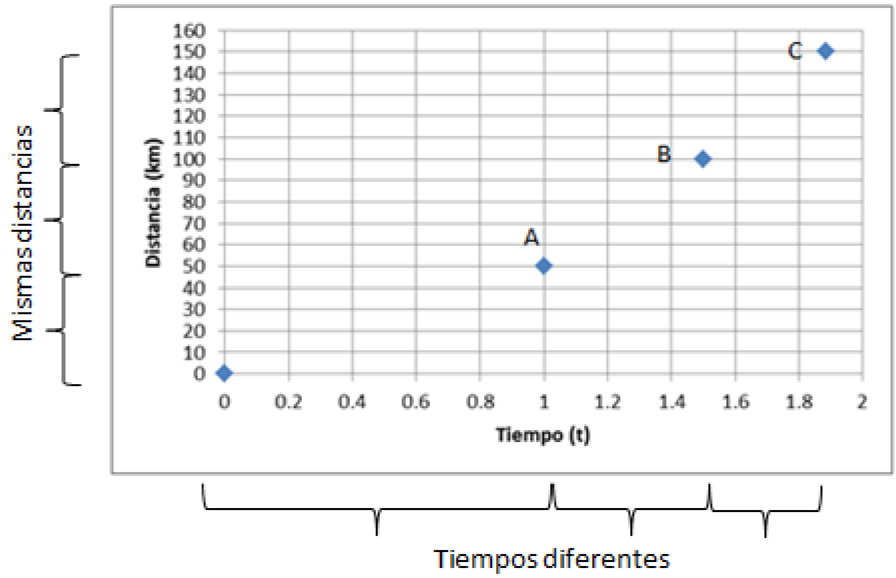
¿Puedo calcular la velocidad instantánea (razón de cambio instantánea) a la que pasó el auto por el punto de la ciudad A (1, 50)? ¿Cuál es? ¿Qué representaría en la gráfica estas velocidades?

Respuesta 1.4

a)

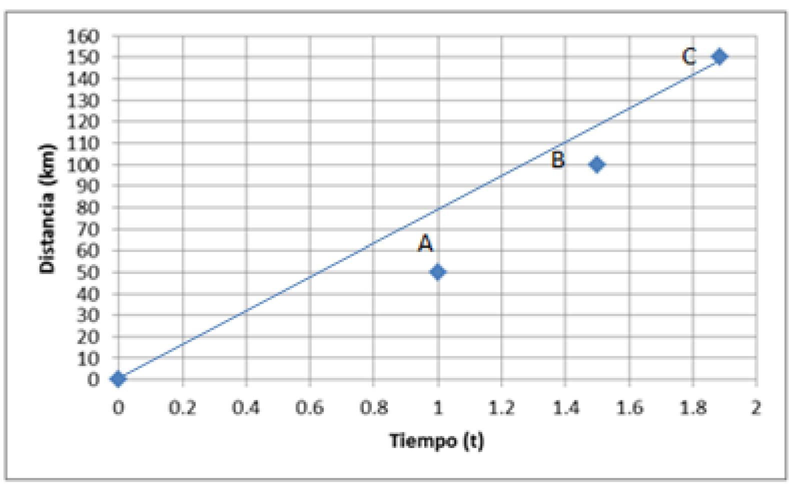


b) Una ciudad de la siguiente se encuentra a la misma distancia 50 km, pero el tiempo que tarda en recorrer esa misma distancia es: 1 hora, 0.5 horas y 0.3846 horas. Lo que quiere decir que la velocidad entre ciudades cambió, aumentó.



c) Velocidad promedio: $\frac{150\ km}{1.8846\ horas} = 79.5924\ km/h$

Representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos: inicio (0,0) y C (1.8846, 150)

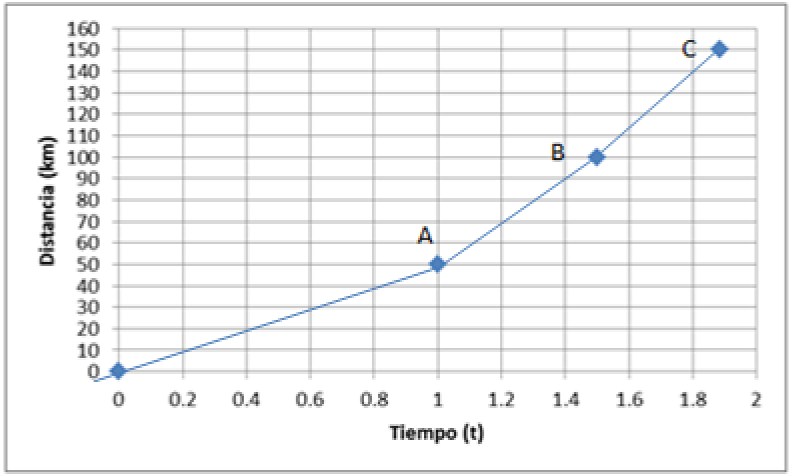


d) Esa velocidad es promedio de un punto a otro, pero no dice mucho de cómo fue la velocidad durante el trayecto, ya que se observó que fue aumentando.

e) Del inicio (0,0) a la ciudad A (1, 50) = $\frac{50\ km}{1\ hora} = 50\ km/h$

De la ciudad A (1, 50) a la B (1.5, 100) = $\frac{100-50}{1.5-1} = \frac{50}{0.5} = 100\ km/h$

De la ciudad B (1.5, 100) a la C (1.8846, 150) = $\frac{150-100}{1.8846-1.5} = \frac{50}{.3846} \sim 130\ km/h$



Representan las pendientes de las rectas que van del inicio al punto A, del A al B y del B al C.

Es una mejor aproximación de las velocidades que tuvo el auto en trayectos más pequeños, pero aún no puedo describir la velocidad del auto en cualquier punto (ni en el punto de la ciudad, ni entre las ciudades), no sé si mantuvo esa velocidad o cambió.

Nota al profesor: Debe aprovechar para hacer ver al estudiante que al conocer puntos más cercanos o tener intervalos más pequeños, conozco mejor el comportamiento de la gráfica

f) No puedo saber a qué velocidad iba en un punto, solo puedo obtener velocidades promedio con la información dada. Necesito los puntos más cercanos a la ciudad A hasta ser casi el punto donde quiero obtener la velocidad.

g)

Distancia	Tiempo	Velocidad promedio
47.5248117	0.97	$\frac{50-47.5248117}{1-0.97}=82.506278$
48.343170960	0.98	$\frac{50-48.343170960}{1-0.98}82.841452$
49.168233740	0.99	83.176626
49.583278935	0.995	83.344213
49.749766257	0.997	83.4112478
49.916521717	0.999	83.4782826
49.958252479	0.9995	83.4950413
49.991649155	0.9999	83.5084483
49.999164885	0.99999	83.5114648
49.999916488	0.999999	83.5117665

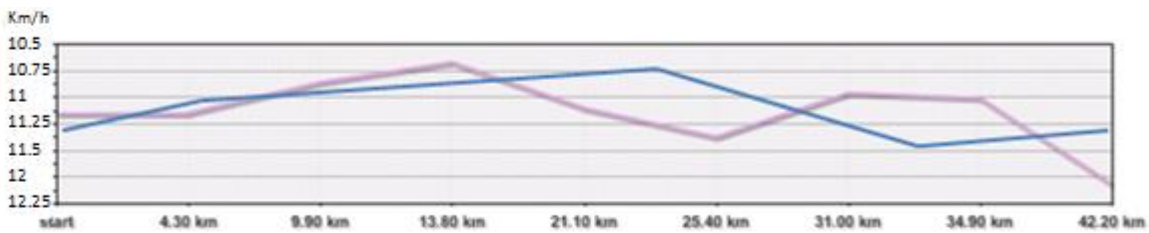
A través de Excel se hacen los cálculos de las velocidades promedio, conforme te vas acercando a los 50 km por el lado izquierdo, la velocidad tiende a ser 83.511

Las velocidades promedio son las pendientes de las rectas que pasan por el punto A y los puntos cercanos. Hasta llegar a la pendiente de la recta (la velocidad instantánea o razón de cambio instantánea) que se vuelve tangente al punto A.

Nota al profesor: Se puede auxiliar de Geogebra para realizar una gráfica en la que a través de las secantes se va acercando al punto de la ciudad A y obtenemos con eso la velocidad instantánea, cuando se tiene la tangente.

Situación 1.5 Dos amigos (A y B) usan sus relojes con GPS para registrar la velocidad a la que corren. Ambos van a correr un maratón. Inician y llegan juntos a la meta en un tiempo de 3 hrs y 45 minutos. Si un maratón tiene 42.2 km:

a) ¿Cuál es la velocidad promedio de los corredores?
b) ¿Se puede determinar cuál de las siguientes gráficas obtenida por los relojes pertenece al corredor A y cuál al B?



c) De no ser así, ¿qué necesito?

Respuesta 1.5

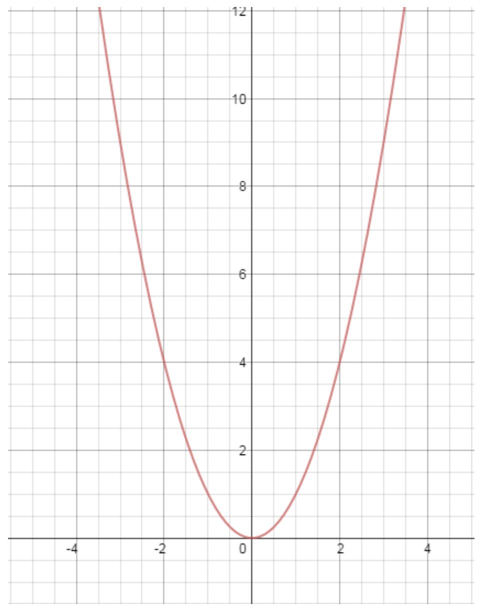
a) Velocidad promedio: $\frac{42.2\ km}{3.75\ h} = 11.25\ km/h$ de ambos porque hicieron la misma distancia y el mismo tiempo independientemente de la velocidad que hayan llevado durante el recorrido.

Nota al profesor: Los estudiantes deben hacer la conversión de los 45 minutos a 0.75 horas para poder escribir correctamente la cantidad de horas para terminar el maratón.

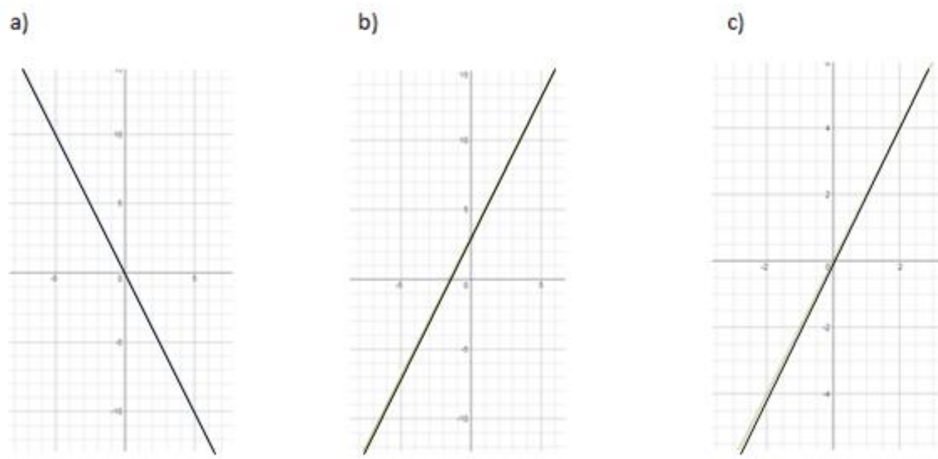
b) En la gráfica se observa que ambos iban a una velocidad de alrededor de 11.25 km/hr, pero la información no es suficiente para determinar cuál es la gráfica de cada uno.

c) Se necesitan las velocidades instantáneas de cada corredor.

Situación 1.6 Analiza los valores de las razones de cambio instantáneas en cualquier punto de la gráfica (pendientes de las rectas tangentes en los puntos)



a) ¿Qué pasa con la razón de cambio instantánea en cero (pendiente de la tangente)? ¿En números positivos? ¿En números negativos?
b) Determina cuál de las siguientes gráficas representa su función de las razones de cambio instantáneas.



Respuesta 1.6

a) El estudiante debe analizar que en cero la pendiente es cero. Para valores positivos de x la pendiente es positiva y va aumentando su valor conforme crece x. Y para valores negativos de x la pendiente es negativa pero va aumentando (menos negativa) conforme x va creciendo o se acerca a 0.

b) La recta c) es la función de las razones de cambio instantáneas (función derivada).

Nota al profesor: Puede aprovechar el momento para llamar a esa razón de cambio promedio en un punto, la derivada en ese punto (también la pendiente de la recta tangente al punto). Y que la función de las razones de cambio promedio es la función derivada.

PROBLEMAS PERSONALES

Situación 1.1P[1] Una compañía, a través de sus fábricas, libera en la atmósfera toneladas de una sustancia química para combatir el "smog". La cantidad de toneladas de sustancia química liberada se registra diariamente, durante un período de 18 horas, obteniendo la siguiente tabla:

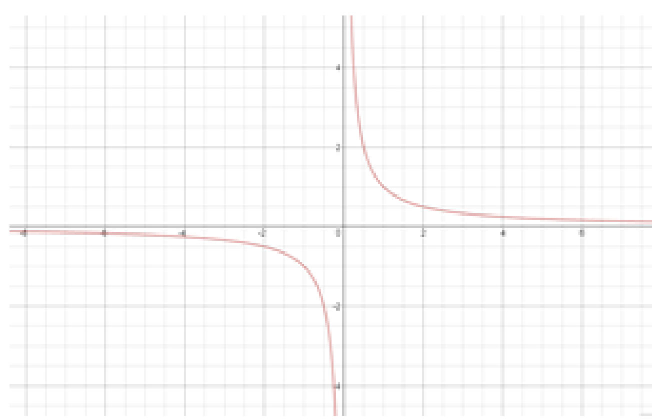
Tiempo t (hrs)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Número de toneladas f(t)	0	4.8	11.2	19.2	28.8	40	52.8	67.2	83.2	100.8

a) ¿Cómo aumenta la cantidad de toneladas de sustancia química desde que se empieza a liberar hasta 2 horas después?
b) ¿Cómo aumenta la cantidad de toneladas de sustancia química desde que se empieza a liberar hasta 6 horas después?
c) ¿Cómo aumenta la cantidad de toneladas de sustancia química entre las 12 y las 14 horas?
d) Cuál es la liberación de cambio instantánea de toneladas de sustancia química exactamente 8 horas después, si se cuenta con la siguiente tabla:

Tiempo t (hrs)	7.5	7.75	7.8	7.9	8	8.1	8.2	8.25	8.5
Número de toneladas f(t)	26.25	27.51	27.76	28.28	28.8	29.32	29.84	30.11	31.45

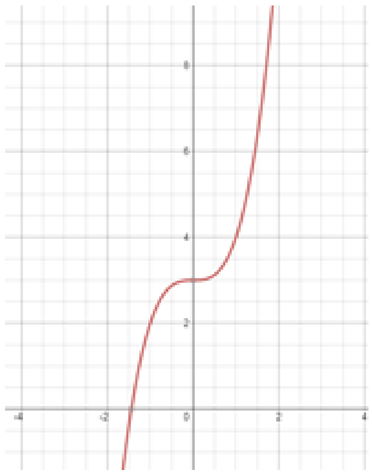
Situación 1.2P. Relaciona cada función con su función derivada y explica por qué.

a)

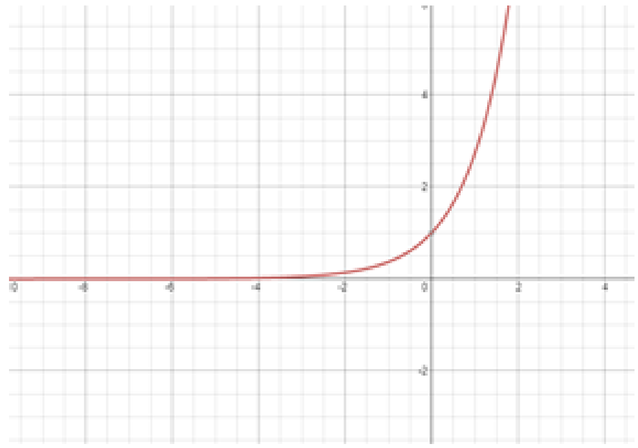


[1] Basada en: http://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Documents/Derivadas/razon%20de%20cambio-cb.pdf

b)

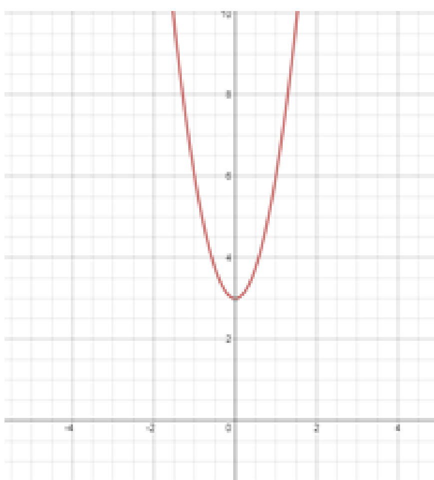


c)

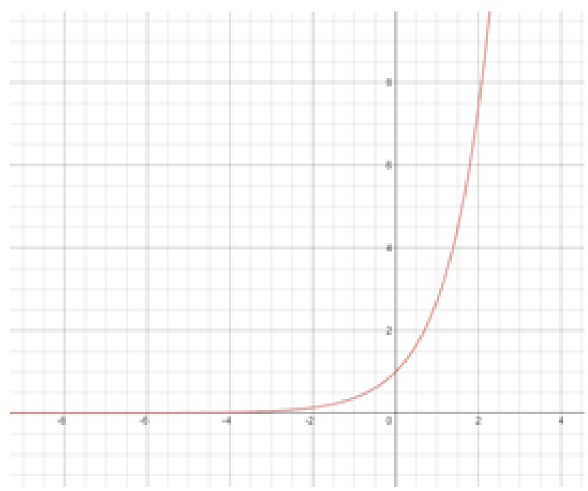


Función derivada:

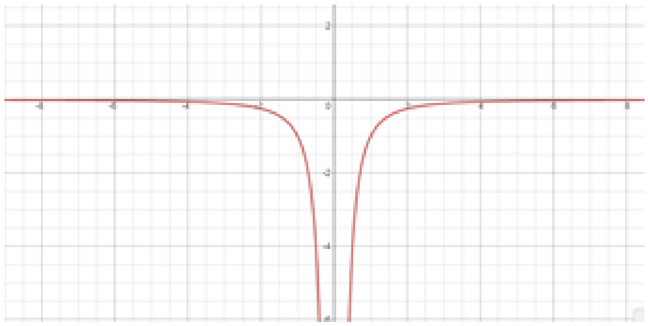
1)



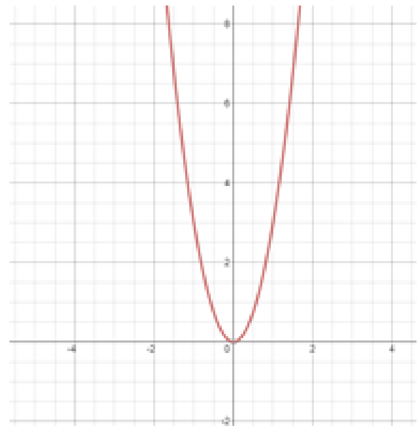
2)



3)



4)



SESIÓN 2: DERIVADA EN UN PUNTO, MÁXIMOS, MÍNIMOS Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Competencias generales del CCSSM que se promueven:

PM.1 Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos.

PM.2 Razonar de manera abstracta y cuantitativamente.

PM.3 Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

PM.4 Modelar con las matemáticas.

PM.5 Utilizar las herramientas adecuadas de manera estratégica.

PM.6 Asista a la precisión.

PM.7 Buscar y hacer uso de la estructura.

PM.8 Buscar y expresar regularidad en razonamiento repetido. (CCSSI 2010)

Competencias específicas:

En esta sesión el estudiante:

1. Modela situaciones de la vida real a través de funciones (expresiones algebraicas y gráficas).

2. Interpreta y aplica la derivada en una función de costos.

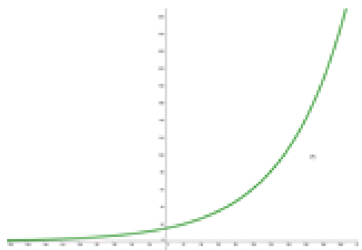
3. Analiza las situaciones en las que la derivada en un punto no existe.

4. Analiza cómo debe ser la razón de cambio instantánea cuando se tienen puntos singulares (máximos, mínimos o de inflexión) y los determina.

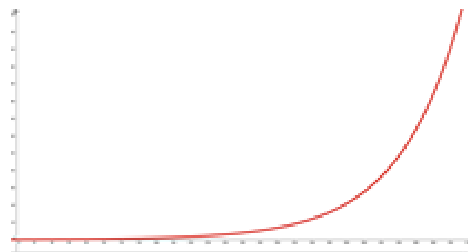
Situación 2.1 La tasa de crecimiento de la población del Estado de México para el 2010 es de 1.4, según cifras oficiales del INEGI, ocupa el primer lugar en los estados más poblados del país, seguido del Distrito Federal y Veracruz.

a) Si en el año 2010 la población es de 15 175 862 ¿cuál es la expresión algebraica que modela el crecimiento de la población para los siguientes años?
b) ¿Cuál será la población para el año 2011?
c) ¿Con qué rapidez crece la población en el año 2011?
d) Determine cuál es la gráfica de la función que representa rapidez con que crece la población en cualquier año.

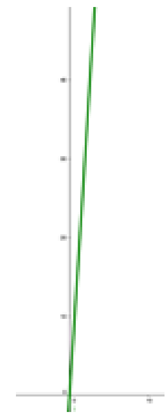
a)



b)



c)



Respuesta 2.1

a) $P(n) = 15\ 175\ 862\ (1.014)^n$

b) $\mathrm{P}(1) = 15\ 175\ 862\ (1.014)^1 = 15{,}388{,}324.068$

c) $P'(1) = 210989\ \ (1.014)^1 = 213{,}942.846$

Nota al profesor: Algunos estudiantes podrían obtener la razón de cambio promedio considerando la población del 2011 y la del 2010, sólo restando y obteniendo 212 462.068, lo cual no es la razón de cambio instantánea.

d) La gráfica b)

Situación 2.2 Una pequeña empresa veracruzana que elabora dulces artesanales llamados "jamoncillos", tiene costos diarios en pesos determinados por la expresión $c(n) = 200 + 0.13n^2$ donde n es la cantidad de dulces producidos.

a) Si se producen 10 dulces ¿cuál es el costo promedio por dulce?
b) ¿Cuál es el costo promedio por dulce de producir 11 dulces con respecto a 10? ¿Qué significa gráficamente?
c) Encuentre la variación del costo total con respecto a 10 unidades (costo marginal).
d) ¿Porque es importante para la pequeña empresa saber la variación de sus costos cuando aumenta la producción?

Respuesta 2.2

a) $c(10) = 200 + 0.13(10)^2 = 213$ es el costo de producir 10 dulces

Lo que quiere decir que en promedio producir un dulce cuesta $21.3 pesos

b) $c(11) = 200 + 0.13(11)^2 = 215.73$

$$\frac{c(11) - c(10)}{11 - 10} = \frac{215.73 - 213}{1} = 2.73$$

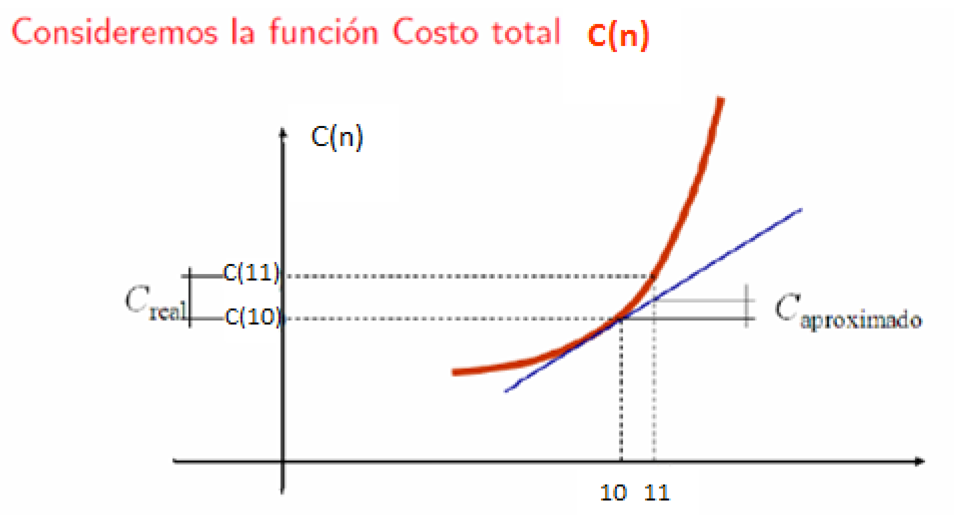
Que gráficamente es el valor de la pendiente (razón de cambio promedio) del costo de producir entre 10 y 11 dulces.

c) La variación del costo total al producir 10 unidades es la derivada de la función en 10, es decir \$2.6 pesos

Nota al profesor: El estudiante debe investigar qué significa costo marginal para poder comprender que se trata de la derivada de la función $c(n)$.

$$\frac{dc(n)}{dn} = 0.26n$$

Discutir gráficamente el valor de la pendiente encontrada en b) con el resultado en c) (el valor de la recta tangente en 10).



d) Porque le ayuda a determinar si pueden producir más o menos dulces, de tal manera que no tenga pérdidas.

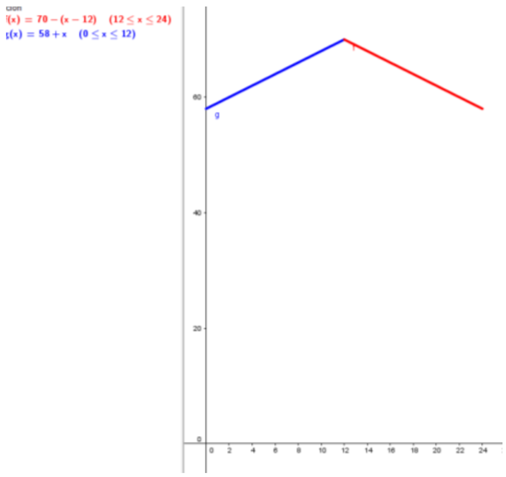
Situación 2.3 Una persona que inicialmente pesaba 58 kg sube un kilo por mes, al año asiste a su médico para comenzar una dieta que le permita recuperar su peso. El nutriólogo le explica que debe bajar un kilo por mes, para evitar descompensaciones.

a) De seguir con esta tendencia elabore una gráfica que modele esta situación
b) Explique lo que sucede en la gráfica cuando se llega a un año
c) ¿Cómo es la derivada o pendiente de la recta tangente de la función cuando la persona aumenta de peso?
d) ¿Cómo es la derivada o pendiente de la recta tangente de la función cuando la persona pierde peso?

e) Explique lo que sucede con la derivada cuando se llega a un año y realice la gráfica.

Respuesta 2.3

a)

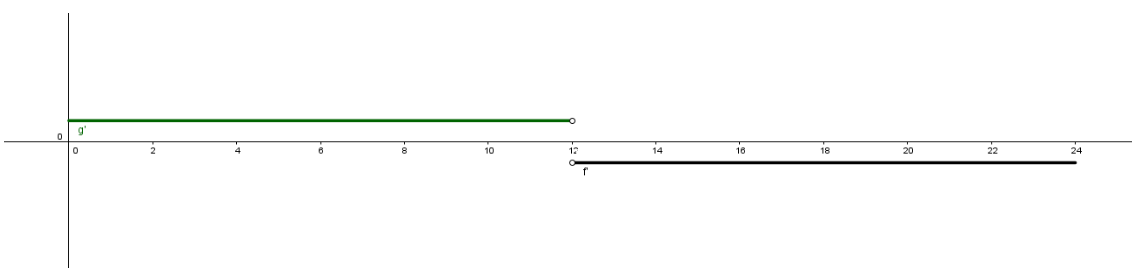


b) La gráfica que iba ascendiendo de repente comienza a descender

c) El valor de la pendiente de la recta tangente (la derivada) en cualquier punto es positiva porque crece (el valor es 1)

d) En este caso es negativa porque decrece (el valor es -1)

e) Cuando se va aproximando al año la derivada es 1 y cuando ha transcurrido el año la derivada es -1. Como la derivada tiende a valores distintos acercándose por la derecha y por la izquierda del punto 12 entonces la derivada no existe en ese punto. Tal como se puede observar en la gráfica.

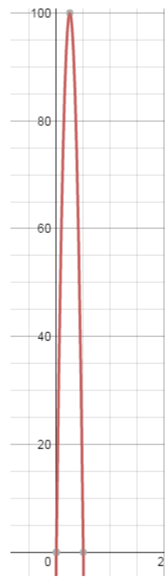


Nota al profesor: Al estudiante le debe quedar claro que la derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto tomando en cuenta un acercamiento por ambos lados. Si el valor es el mismo la derivada existe, sino no existe.

Situación 2.4 Una pelota es lanzada hacia arriba y después de t segundos la pelota tendrá una altura de $f(t) = -16t^2 + 80t$, grafica su trayectoria.

a) ¿A qué velocidad va la pelota a los 2 segundos?
b) Si quiero saber la altura máxima de la pelota, ¿cuál debe ser el valor de la velocidad o razón de cambio instantánea en ese punto?
c) ¿En qué segundo la pelota alcanza su altura máxima y cuál es esa altura?

Respuesta 2.4



a) Ya se analizó que la velocidad es la derivada de la función, así que para $\mathrm{f(t)} = -16\mathrm{t}^2 + 80\mathrm{t}$ usando Wolfram o cualquier software para derivar se tiene $\mathrm{f}'(\mathrm{t}) = -32\mathrm{t} + 80$ y la velocidad en el segundo 2 es: $-32(2) + 80 = 16\ \mathrm{m/s^2}$

Nota al profesor: Acordar con los estudiantes que la derivada de una función f se escribe f'

b) De acuerdo a la gráfica se observa claramente que la pendiente de la recta tangente al punto máximo debe ser 0, o que la velocidad es $0\ \mathrm{m/s^2}$.

c) Si la velocidad es cero, $\mathrm{f}'(\mathrm{t}) = -32\mathrm{t} + 80 = 0$ resolviendo la ecuación, se tiene que eso se cumple para $\mathrm{t} = 2.5\ \mathrm{s}$, la altura que alcanza en ese punto es $\mathrm{f}(2.5) = -16(2.5)^2 + 80(2.5) = 100\ \mathrm{m}$.

Nota al profesor: Cerrar la situación dejando claro a los estudiantes que ya observaron que para encontrar un punto singular (puede ser máximo, mínimo o más adelante verán que puede ser un punto de inflexión) derivan la función, igualan a cero y encuentran el o los valores que lo satisfacen (donde hay un punto singular la pendiente de la tangente en el punto es 0 y por lo tanto la derivada es 0).

Situación 2.5 En un laboratorio se hace una prueba para determinar el metabolismo del azúcar en la sangre, en un tiempo de 4 horas, cuyo comportamiento está determinado por la función $c(t) = 12 + 9t - 3t^2$

a) Determine en qué tiempo se tiene la mayor concentración de azúcar en la sangre y el valor de esa concentración.
b) ¿Cuál es el valor de la razón de cambio de la concentración del azúcar en ese punto? ¿Porqué?
c) Encuentre la variación del azúcar en la sangre en el instante de 1 y 2 horas. Explique lo que significa.

Respuestas 2.5

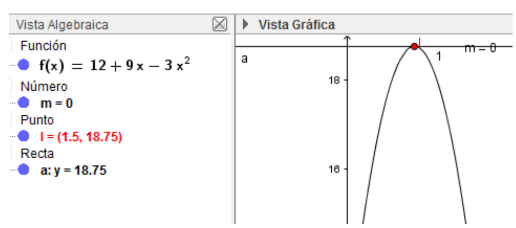
a) El resultado es en 1.5 horas y se llega a él de varias formas:

1. Graficando la función en Geogebra, localizando el punto donde la función alcanza un máximo
2. Graficando la función derivada, encontrando el punto de intersección con el eje t donde $\mathrm{c}'(\mathrm{t}) = 0$
3. Encontrar la derivada con apoyo de Wolfram y hacer $\mathrm{c}'(\mathrm{t}) = 9 - 6\mathrm{t} = 0$ encontrando el valor de t para el cual la derivada es igual a cero.

$\mathrm{c}(1.5) = 12 + 9(1.5) - 3(1.5)^2 = 18.75$ Concentración de azúcar en la sangre

b) Cero, porque es el punto donde se alcanza el máximo de la función y el valor de la pendiente de la tangente en ese punto es cero.

Nota al profesor: Con apoyo Geogebra trace la recta tangente en el punto máximo y encuentre su pendiente.



c) $c'(1) = 9 - 6(1) = 3$ y $c'(2) = 9 - 6(2) = -3$

La variación del azúcar en la sangre en 1 hora es de 3 y en 2 horas es de -3, es positiva en 1 porque va aumentando la concentración y en 2 horas es negativa porque va disminuyendo la concentración.

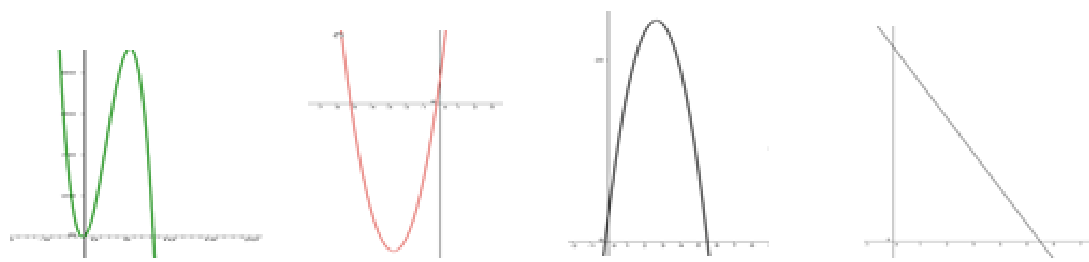
Situación 2.6 Un bibliotecario con un horario de trabajo de 8:00 a 15:00 horas, clasifica y número de libros en x número de horas, su productividad está determinada mediante la ecuación $y = 3x + 8x^2 - x^3$.

a) Determine la velocidad a la que el bibliotecario está acomodando libros a las 11 de la mañana y los libros que lleva acomodados hasta esa hora.

b) ¿En qué tiempo acomodó el máximo número de libros? ¿a qué hora fue? y ¿qué sucede después?

c) ¿Cuál es la gráfica de la velocidad con la que el bibliotecario acomoda los libros?

a) b) c) d)



Respuesta 2.6

a) $y'(3) = 3 + 16x - 3x^2 = 3 + 16(3) - 3(3)^2 = 24$ *libros/hora*
$y(3) = 3(3) + 8(3)^2 - (3)^3 = 54\ libros\ acomodados$

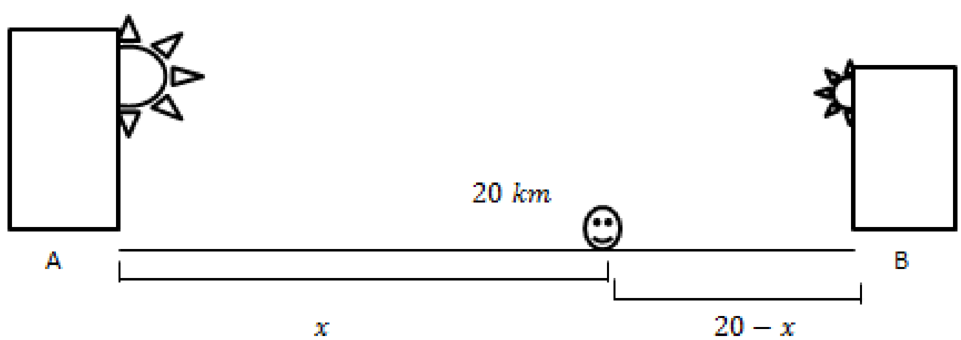
Nota para el profesor: Encuentre la derivada de la función o hágalo de forma gráfica ambos con apoyo de un programa. Observe en las respuestas de los estudiantes, que tomen en cuenta las horas transcurridas al momento de evaluar su función, a partir de la hora de entrada del bibliotecario.

b) $\mathrm{y}'(0) = 3 + 16\mathrm{x} - 3\mathrm{x}^2 = 0$ y esto sucede cuando $\mathrm{x} = 5.5145$ que es el tiempo en el que acomodó el máximo número de libros.

Sucedió a las 2 de la tarde con 30 minutos y 50 segundos (convirtiendo a horas, minutos y segundos, y considerando la hora de entrada del bibliotecario)

c) La gráfica c)

Situación 2.7 Una persona se encuentra ubicada entre dos ciudades A y B, situadas a 20km una de la otra. Cada ciudad tiene una lámpara que ilumina a la otra con diferente intensidad y la persona busca donde debe ubicarse para tener la menor iluminación (como se muestra en la imagen).



Si la función que modela la iluminación en cualquier posición x es:

$$f(x) = \frac{8}{x^2} + \frac{1}{(20-x)^2}$$

a) Analiza la función y la imagen, ¿qué pasa con $x < 0, x = 0, 0 < x < 20, x = 20, x > 20$?
b) ¿En dónde debe situarse la persona para tener la menor iluminación?

Respuesta 2.7

a) Se observa en la imagen que para $x < 0$ se pierde la iluminación, se va haciendo 0. Para $x = 0$ la persona se encuentra en la ciudad A y tiene toda la iluminación, en la función se ve una fracción donde 0 sería el denominador y eso crecería mucho. Para $0 < x < 20$ es en donde debe ubicarse la persona, en alguno de esos puntos debe encontrarse un mínimo. En $x = 20$ la persona tendría toda la iluminación por estar en la ciudad B, en la función se ve la fracción donde $(20 - x)$ está de denominador así que al hacer $x = 20$ se tendría denominador 0 y eso crecería mucho. Para $x > 20$ se va perdiendo la iluminación, se va haciendo 0.

b) Se obtiene la derivada de f con Wolfram y se siguen los pasos para encontrar el o los valores x que satisfacen que $f'(x) = 0$ (también pueden obtener el mínimo en Wolfram sin hacer álgebra).

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{(20 - x)^3} - \frac{8}{x^3}\right)$$

$f'(x) = 0$ si y sólo si

$$\frac{1}{(20 - x)^3} - \frac{8}{x^3} = 0$$

$$\frac{1}{(20 - x)^3} = \frac{8}{x^3}$$

$$8(20 - x)^3 = x^3$$

$$\sqrt[3]{8(20 - x)^3} = \sqrt[3]{x^3}$$

$$2(20 - x) = x$$

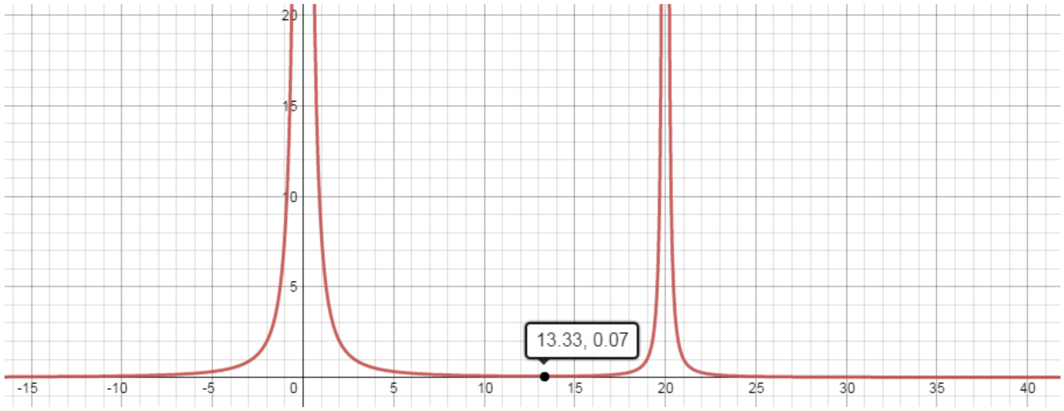
$$40 - 2x = x$$

$$3x = 40$$

$$x = \frac{40}{3} \sim 13.333$$

La persona debe ubicarse a $\frac{40}{3} \sim 13.333$ km del edificio A o $\frac{20}{3} \sim 6.666$ km del edificio B.

Nota al profesor: Al estudiante le debe quedar claro que encontró un mínimo "local" (donde la iluminación mínima local es 0.07, cuando la persona se encuentra a $\frac{40}{3}$ km del edificio A), ya que existen valores de la función cuando $x < 0$ *y* $x > 20$ que son menores a 0.07



Situación 2.8 Analiza los puntos singulares (donde $f' = 0$) de la función $f(x) = x^3(x-2)$ y determina si son mínimos o máximos

Respuesta 2.8

Usando Wolfram se tiene que $f'(x) = 2x^2(2x-3)$, los puntos que satisfacen que $f' = 0$ son:

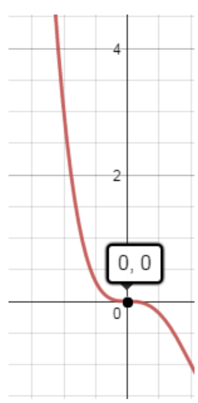
$$2x^2(2x-3) = 0$$

$$2x^2 = 0\,, 2x-3 = 0$$

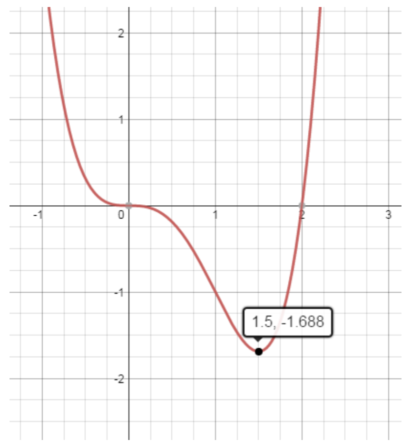
$$x = 0\,, x = \frac{3}{2}$$

Analicemos que pasa alrededor de $x = 0$ *(en* $x < 0$ *y* $0 < x < \frac{3}{2}$*).* Para $x < 0$ $f(x)$ es siempre positiva; en $x = 0$, $f(0) = 0$; y para $0 < x < \frac{3}{2}$ es siempre negativa. $x = 0$ No puede ser un punto mínimo porque aunque comienza con valores positivos hasta llegar al cero, cambia a valores negativos y cero es mayor.

Nota al profesor: Definir con los estudiantes que a este tipo de punto singular se le llama punto de inflexión (hay un cambio de concavidad).



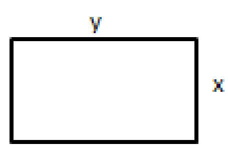
Analicemos ahora que pasa alrededor de $x = \frac{3}{2}$ *(*$0 < x < \frac{3}{2}$ *y* $x > \frac{3}{2}$*).* Ya se analizó que para $0 < x < \frac{3}{2}$, $f(x)$ comienza en cero y después es negativa (decrece); en $x = \frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{16}$; y para $x > \frac{3}{2}$ se tienen números negativos hasta $x = 2$ y después $f(x)$ siempre es positiva (crece). Por lo tanto se forma una concavidad donde $x > \frac{3}{2}$ es el mínimo.



PROBLEMAS PERSONALES

Situación 2.1P Don Manuel tiene algunas hectáreas de terrenos y les regalará a sus hijos una parte, de tal manera que el más astuto tendrá una mayor área de terreno. Todos tienen 100 metros de alambre para que cerquen su terreno con la condición de que éste sea rectangular. Si fueras un hijo de don Manuel, ¿cuáles serían las medidas de tu terreno para tener un área máxima?

Respuesta 2.1P



El perímetro del terreno debe ser: $P = 100 = 2x + 2y;\ 2x + 2y = 100;\ 2y = 100 - 2x$

$$y = 50 - x$$

El área del rectángulo está dada por $A = x \cdot y$, así la función que modela el área del rectángulo es:

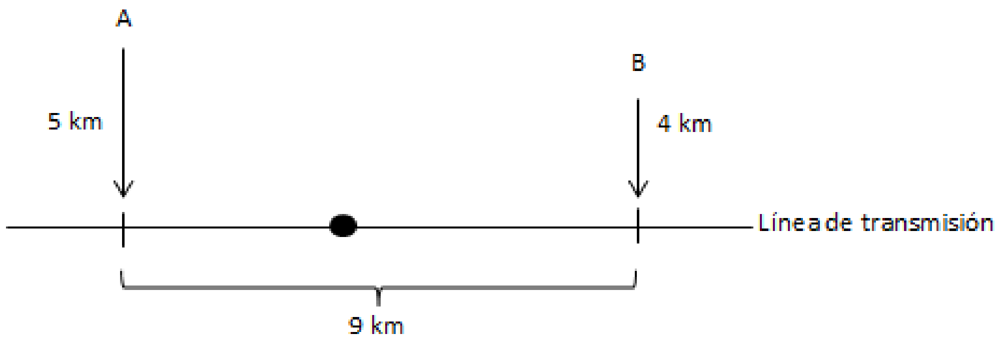
$$\mathrm{f(x) = x(50 - x)}$$

Se usa wólfram para obtener la derivada e igualamos a cero (también se puede encontrar en wólfram el valor del punto máximo): $f'(x) = -2x + 50 = 0;\ 2x = 50;\ x = 25$

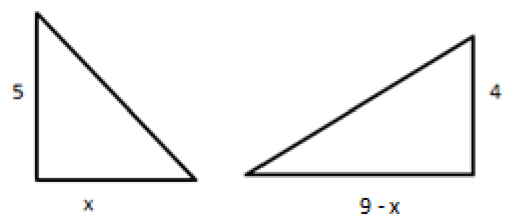
Entonces el máximo se obtiene cuando $x = 25$ y $y = 50 - (25) = 25$

Las medidas son: largo y ancho 25 metros

Situación 2.2P Se quiere poner un poste sobre una línea de transmisión para colocar un cable que vaya del poste a la ciudad A y otro del poste a la ciudad B. La ciudad A se encuentra a 5 km del punto más cercano a la línea de trasmisión y la ciudad B se encuentra a 4 km. Si la distancia entre estos dos puntos sobre la línea es 9 km. ¿Dónde debe colocarse el poste de manera que se use la mínima cantidad de cable? ¿Cuál es esa cantidad?



Respuesta 2.2P Usando el teorema de Pitágoras para los dos triángulos:



Se requiere minimizar la función $f(x) = \sqrt{25 + x^2} + \sqrt{16 + (9 - x)^2}$

Usando wólfram se obtiene la derivada y se iguala a cero. También se puede encontrar en wólfram el valor del punto mínimo, que se da en $x = 5$.

El poste se debe colocar a 5 km del punto más cercano entre A y la línea de transmisión para usar $f(5) = \sqrt{2(25)} + \sqrt{2(16)} = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ km de cable